

研究方法與過程：

一、基準轉換與坐標系統轉換的差異

1. 基準轉換是指將同一點在基於某一基準下的坐標轉換到另一基準下的坐標，例如 TWD67 轉 TWD97。
2. 坐標系統轉換指的是同一點的坐標在同一個基準下，由一種坐標系統下的坐標轉換到另一種坐標系統下的坐標，例如空間直角坐標與大地坐標之間的相互轉換。

二、三維坐標基準轉換

三維坐標基準轉換的方法有以下三種：

1. 正交轉換

(1) 定義

假設 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 和 $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ 、 $\vec{z}$ 是兩組基底向量且各自互相垂直，從一組卡式直角坐標經由正交轉換到另一組卡式直角坐標，轉換後其形狀及大小都不會改變。

(2) 轉換公式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R(\omega, \varphi, \kappa) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

2. 相似轉換

(1) 定義

假設 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 和 $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ 、 $\vec{z}$ 是兩組基底向量且各自互相垂直，它們之間有一個尺度關係(S)從一組卡式直角坐標經由轉換到另一組卡式直角坐標後其形狀不會變形，但會有大小上的改變，因此是一個正形轉換，又稱(Helmert)七參數轉換。

(2) 轉換公式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = S \times R(\omega, \varphi, \kappa) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

3. 仿射轉換

(1) 定義

假設 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 是三個互相垂直的單位基底向量，另一個單位基

底向量 $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ 、 $\vec{z}$ 並不互相垂直，轉換後原有的圖形會產生變形，轉換過程中一共有 12 個轉換參數。

(2) 轉換公式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

轉換方式	影響效果
正交變換 Orthogonal	改變位置與方向，尺度與形狀保持不變。
相似變換 Helmert	各軸同一尺度均改變其大小，形狀保持不變。
仿射變換 Affine	改變形狀與大小。

表(一) 三種不同轉換的差異

而本論文探討的主要主題七參數轉換屬於三維相似基準轉換，以下將詳細探討七參數坐標轉換。

三、傳統七參數轉換方程式(矩陣表示)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

其中，S 代表尺度變化； ω 、 φ 、 κ 代表分別繞 x、y、z 軸旋轉的角度； x_0 、 y_0 、 z_0 代表在 x、y、z 方向上的平移量。

我們將分別繞 x、y、z 軸三個旋轉矩陣乘起來以一個旋轉矩陣 M 表示：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = SM \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

其中旋轉矩陣 M：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = \cos \varphi \cos \kappa$$

$$m_{12} = \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa + \cos \omega \sin \kappa$$

$$m_{13} = -\cos \omega \sin \varphi \cos \kappa + \sin \omega \sin \kappa$$

$$m_{21} = -\cos \varphi \sin \kappa$$

$$m_{22} = -\sin \omega \sin \varphi \sin \kappa + \cos \omega \cos \kappa$$

$$m_{23} = \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa + \sin \omega \cos \kappa$$

$$m_{31} = \sin \varphi$$

$$m_{32} = -\sin \omega \cos \varphi$$

$$m_{33} = \cos \omega \cos \varphi$$

我們將以 $\mathbf{M}$ 為表示的矩陣乘開，將七參數三維轉換以方程式形式表示：

$$x = S(m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z) + x_0$$

$$y = S(m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z) + y_0$$

$$z = S(m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z) + z_0$$

四、泰勒級數定理

一多項式函數 $f(X)$ ，在 $X=X_0$ 處的次方及數展開式：

$$f(X) = a_0 + a_1(X-x_0) + a_2(X-x_0)^2 + a_3(X-x_0)^3 + \dots \quad \text{---(1)}$$

求 a_0 ：選 $x=x_0$ 代入(1)式得 $a_0=f(X_0)$

求 a_1 ：對(1)式微分後，選 $x=x_0$ 代入得 $a_1=f'(X_0)$

求 a_2 ：對(1)式兩次微分後，選 $x=x_0$ 代入得 $a_2=f''(X_0)$

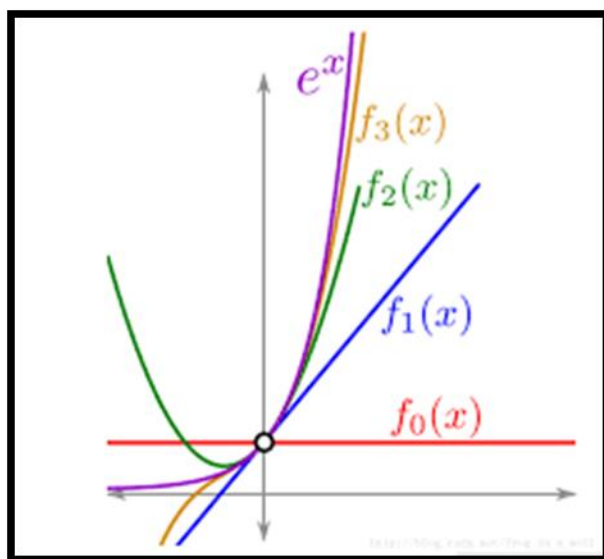
求 a_3 ：對(1)式三次微分後，選 $x=x_0$ 代入得 $a_3=f'''(X_0)$

故我們可以將(1)式的級數展開式表示為：

$$f(X) = f(X_0) + f'(X_0)(X-x_0) + \frac{1}{2!}f''(X_0)(X-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(X_0)(X-x_0)^3 + \dots$$

此式稱為泰勒級數展開式。

泰勒級數展開式是將任何函數轉換成以多項式的表示方式來逼近，當多項式次數取的越高時，則泰勒級數展開式越接近原函數 $f(x)$ 。



圖（1）泰勒級數展開式

資料來源：<http://www.programgo.com/article/5774627464/>

五、泰勒級數展開式的實際應用

1. 把泰勒級數展開式用來求解函數的近似值。
2. 將非線性函數以泰勒級數展開式近似線性化方便求解

六、實際解算步驟

1. 將非線性方程是以泰勒級數展開式線性化，並捨去二次以上之微分項
2. 給予未知數一組近似值
3. 將近似值代入線性化之方程式中求解該未知點之修正數 δx ， δy
4. 更新未知數知近似值(新近似值=原近似值+修正數)
5. 重複步驟 3. 到 4.，直到未知數的修正數等於 0 或小於某誤差極限值

七、線性化後七參數轉換式求解

我們知道一方程式有七個未知數時，至少需要七條方程式才可以求解此方程式，所以我們在求解七參數時至少要有三組轉換座標才可以求解七參數。(每一組座標會提供三條方程式)

因為七參數三維正型轉換方程式是非線性的，我們必須將七參數三維正型轉換方程式以泰勒級數展開式展開才能利用聯立方程式來解算七參數，因為我們只取到展開後的一階項後面高階項忽略不計，所以我們得到的七參數只是近似值。

線性化後七參數轉換式方程式(我們取到偏微分後第一階)：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = s^0 \begin{bmatrix} \cos \kappa^0 & \sin \kappa^0 & 0 \\ -\sin \kappa^0 & \cos \kappa^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi^0 & 0 & -\sin \varphi^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi^0 & 0 & \cos \varphi^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega^0 & \sin \omega^0 \\ 0 & -\sin \omega^0 & \cos \omega^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} +$$

其中，

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial S}\right)_0 & \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_0 & \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)_0 & \left(\frac{\partial X}{\partial \kappa}\right)_0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial S}\right)_0 & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_0 & \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)_0 & \left(\frac{\partial Y}{\partial \kappa}\right)_0 & 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial S}\right)_0 & \left(\frac{\partial Z}{\partial \omega}\right)_0 & \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)_0 & \left(\frac{\partial Z}{\partial \kappa}\right)_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dS \\ d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \\ dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \omega} &= S\{[\cos(\omega) \sin(\varphi) \cos(k) - \sin(\omega) \sin(k)]y\} \\ &+ \{[\sin(\omega) \sin(\varphi) \cos(k) + \cos(\omega) \sin(k)]z\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \omega} &= S\{[-\cos(\omega) \sin(\varphi) \sin(k) - \sin(\omega) \cos(k)]y\} \\ &+ \{[-\sin(\omega) \sin(\varphi) \sin(k) + \cos(\omega) \cos(k)]z\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} = S\{[-\cos(\omega) \cos(\varphi)]y\} + \{[-\sin(\omega) \cos(\varphi)]z\}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = s[(-\sin \varphi \cos \kappa)x + (\sin \omega \cos \varphi \cos \kappa)y + (-\cos \omega \cos \varphi \cos \kappa)z]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = s[(\sin \varphi \sin \kappa)x + (-\sin \omega \cos \varphi \sin \kappa)y + (\cos \omega \cos \varphi \sin \kappa)z]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = s[(\cos \varphi)x + (\sin \omega \sin \varphi)y + (-\cos \omega \sin \varphi)z]$$

$$\frac{\partial X}{\partial k} = s[(-\sin k \cos \varphi)x + (-\sin \omega \sin \varphi \sin k + \cos \omega \cos k)y + (\cos \omega \sin \varphi \sin k + \sin \omega \cos k)z]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial k} = s[(-\cos \varphi \cos k)x + (-\sin \omega \sin \varphi \cos k - \cos \omega \sin k)y + (\cos \omega \sin \varphi \cos k - \sin \omega \sin k)z]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial k} = s[0x + 0y + 0z]$$

$$\frac{\partial X}{\partial S} = (\cos k \cos \varphi)x + (\sin \omega \sin \varphi \cos k + \cos \omega \sin k)y + (-\cos \omega \sin \varphi \cos k + \sin \omega \sin k)z$$

$$\frac{\partial Y}{\partial S} = (-\cos \varphi \sin k)x + (-\sin \omega \sin \varphi \sin k + \cos \omega \cos k)y + (\cos \omega \sin \varphi \sin k + \sin \omega \cos k)z$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = (\sin \varphi)x + (-\sin \omega \cos \varphi)y + (\cos \omega \cos \varphi)z$$

我們可把上式簡化成以下方程式表示：

$$L_X = f(X_0) + f'(X_0) * \delta X$$

利用上面說過的泰勒級數展開式解算步驟：

1. 給予未知數一組近似值 X_0 。
2. 將近似值代入線性化之方程式中利用解七條方程式的聯立解求解該未知點之修正數 δx_1 。
3. 將 $X_0 + \delta x_1$ 更新未知數知近似值(新近似值=原近似值+修正數)。
4. 重複步驟(2)-(3)，直到未知數的修正數等於 0 或小於某誤差極限值，我們便得到我們要的七參數解為 $\hat{X} = X_0 + \delta x_{n-1}$ (近似值)。

以上是假設轉換前後的控制點都沒有誤差的情況下。

八、線性化後七參數轉換式求解(考慮轉換後的座標為觀測值且含有誤差)

我們知道一方程式有七個未知數時，至少需要七條方程式才可以求解此方程式，所以我們在求解七參數時至少要有三組轉換座標才可以求解七參數。（每一組座標會提供三條方程式）

然而三組座標將提供九條方程式，此時我們在有多餘觀測量的情況下便可以利用最小二乘平差法中的間接觀測平差模型來求解我們的七參數。

因為七參數三維正型轉換方程式是非線性的，在我們想要利用最小二乘平差法中的間接觀測平差模型在有多餘觀測量的情況下求解七個未知數(七參數)時就必須將七參數三維正型轉換方程式以泰勒級數展開式展開，因為我們只取到展開後的一階項後面高階項忽略不計，所以我們得到的七參數只是近似值。

線性化後七參數轉換式方程式(我們取到偏微分後第一階)：

$$L_X = f(X_0) + f'(X_0) * \delta X \quad (\text{原觀測方程式})$$

$$L_X + V = f(X_0) + f'(X_0) * \delta X \quad (\text{加入改正數後})$$

$$L_X - f(X_0) + V = f'(X_0) * \delta X \quad (\text{間接觀測平差模式})$$

間接觀測平差函數模型：

$$L + V = AX$$

間接觀測平差隨機模型：

$$\Sigma_{LL} = \sigma_0^2 Q_{LL} = \sigma_0^2 P^{-1}$$

上述稱為 Gauss-Markov 模型，依高斯最小二乘法原理 $[PVV] = \min$ ， $\Phi = [PVV]$ ，求 Φ 對於 X 之微分，使其等於零得最小條件。經微分計算後可得到未知數 X 的解為：

$$(A^T P A)^{-1} A^T P L$$

根據此公式我們可得到：

$$\Delta X = \{ f'(X_0)^*{}^T P f'(X_0)^* \}^{-1} \{ f'(X_0)^*{}^T P (L_X - f(X_0)) \}$$

利用上面說過的泰勒級數展開式解算步驟：

1. 給予未知數一組近似值 X_0
2. 將近似值代入線性化之方程式中利用最小二乘平差法求解該未知點之修正數 δx_1
3. 將 $X_0 + \delta x_1$ 更新未知數知近似值 (新近似值 = 原近似值 + 修正數)
4. 重複步驟 2. 到 3.，直到未知數的修正數等於 0 或小於某誤差極限值，我們便得到我們的七參數解

$$\begin{aligned} \text{近似值 } \hat{X} &= X_0 + \delta x_{n-1} \\ \text{改正數 } V &= f(\hat{X}) + f'(\hat{X}) \delta x_n - L_X \end{aligned}$$

九、利用傳統迭代法解七參數的程式開發

1. 設計轉換前、轉換後座標

隨機定義一百組三圍空間座標 (x, y, z) ，稱為 A，使用各轉換方式進行轉換，其轉換矩陣參數參照上述的參數設計表，得另一轉換後的一百組座標，稱為 B。

- 2.

$$\text{利用 } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + V = S * R(\omega, \varphi, \kappa) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \text{ 七參數轉換公式，我們可以}$$

得出轉換後的 100 組座標，考慮轉換後的座標為觀測值所以含有誤差，我們加入符合高斯分佈曲線的誤差。

- 3.

$$\text{接下來我們就將 } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + V = S * R(\omega, \varphi, \kappa) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \text{ 轉換公式線性化}$$

變成

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = S^0 \begin{bmatrix} \cos \kappa^0 & \sin \kappa^0 & 0 \\ -\sin \kappa^0 & \cos \kappa^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi^0 & 0 & -\sin \varphi^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi^0 & 0 & \cos \varphi^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega^0 & \sin \omega^0 \\ 0 & -\sin \omega^0 & \cos \omega^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x^0 \\ T_y^0 \\ T_z^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial S} \right)_0 & \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_0 & \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)_0 & \left(\frac{\partial X}{\partial \kappa} \right)_0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial S} \right)_0 & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)_0 & \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)_0 & \left(\frac{\partial Y}{\partial \kappa} \right)_0 & 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial S} \right)_0 & \left(\frac{\partial Z}{\partial \omega} \right)_0 & \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right)_0 & \left(\frac{\partial Z}{\partial \kappa} \right)_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dS \\ d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \\ dT_x \\ dT_y \\ dT_z \end{bmatrix}$$

程式開始進行迭代求解七參數，以下是迭代的步驟：

- (1) 自定出七參數近似值
- (2) 將近似值代入線性化之方程式中利用最小二乘平差法求解七參數之修正數
- (3) 將原近似值+修正數更新七參數近似值(新近似值=原近似值+修正數)
- (4) 重複步驟(2)-(3)，直到七參數的修正數小於 0.00001 程式便會停止迭代，我們便得到我們的七參數解；轉換後座標的改正數

4. 使用平差技巧，先進行除錯，再進行第二次平差。

5. 跑 100 次迴圈使結果更接近真實情形

6. 分析

將七參數轉換、仿射轉換、四元素轉換、卡雷七參數轉換做比較，分析何種轉換方式較優異。

7. 使用真實世界座標去計算傳統七參數轉換成果

(1) 將 local 與 wgs84 的兩組座標匯入程式

(2) 由於七參數轉換是非線性化的，因此使用泰勒級數展開式將其線性化，以迭帶的方式求出七參數，其做法如下：

- i. 將非線性方程是以泰勒級數展開式線性化，並捨去二次以上之微分項
- ii. 給予未知數一組近似值
- iii. 將近似值代入線性化之方程式中求解該未知點之修正數 δx ， δy
- iv. 更新未知數知近似值(新近似值=原近似值+修正數)
- v. 重複步驟 iii. 到 iv.，直到未知數的修正數等於 0 或小於某誤差極限值

(3) 使用平差技巧，先進行除錯，再進行第二次平差

(4) 與七參數轉換、仿射轉換、卡雷轉換做比較，分析何種轉換方使較優異。

壹、解釋卡雷定理及其運用

一、Cayley transform 矩陣轉換

1. 定理解釋

令 A 為一個 $n \times n$ 階矩陣，若 $I + A$ 為可逆矩陣，則 Cayley 矩陣轉換：

$$T(A) = (I + A)^{-1}(I - A) = (I - A)(I + A)^{-1}$$

其中， $(I + A)^{-1}$ 與 $(I - A)$ 為可交換矩陣，證明如下：

$$\begin{aligned}(I + A)^{-1}(I - A) &= (I + A)^{-1}I - (I + A)^{-1}A \\&= (I + A)^{-1} - (A^{-1}(I + A))^{-1} = (I + A)^{-1} - ((I + A)A^{-1})^{-1} \\&= (I + A)^{-1} - A(I + A)^{-1} = (I - A)(I + A)^{-1}\end{aligned}$$

通過 Cayley 變換，可使反對稱矩陣 A 與正交矩陣 Q 有一對一的對應關係：

$$Q = T(A) \rightarrow Q = (I + A)^{-1}(I - A) = (I - A)(I + A)^{-1}$$

因為 A 是反對稱矩陣，其特徵值必為零或純虛數，可知 $I + A$ 的特徵值（即 A 的特徵值加 1）不等於零，其逆矩陣存在。

而以下可以證明 Q 是正交矩陣：

$$\begin{aligned}Q^T Q &= ((I + A)^{-1}(I - A))^T (I + A)^{-1}(I - A) \\&= (I - A)^T ((I + A)^{-1})^T (I - A)(I + A)^{-1} \\&= (I - A^T)(I + A^T)^{-1}(I - A)(I + A)^{-1} \\&= (I + A)(I - A)^{-1}(I - A)(I + A)^{-1} = I\end{aligned}$$

Q 為正交矩陣，其特徵值的絕對值等於 1，換句話說，任何一個不含特徵值 -1 的正交矩陣 Q 必可表示為：

$$A = T(Q) \rightarrow A = (I + Q)^{-1}(I - Q) = (I - Q)(I + Q)^{-1}$$

而只要將 $Q = (I - A)(I + A)^{-1}$ 此式等號左右各乘 $(I + A)$ ，在經過移項後

整理為 $I - Q = QA + A = (Q + I)A$ 。由於 Q 定義為不含特徵值 -1 ，即知

$Q + I$ 不含特徵值 0 ，因此得證 $A = (I + Q)^{-1}(I - Q)$ 。

由此可知反對稱矩陣 A 與正交矩陣 Q 透過 Cayley transform 矩陣轉換有此對應關係：

$$Q = T(A), \quad A = T(Q)$$

二、Cayley transform 定理的用途(用於七參數矩陣

的線性解法)

已知三維七參數轉換矩陣可寫成以下形式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa + \cos\omega\sin\kappa & -\cos\omega\sin\varphi\cos\kappa + \sin\omega\sin\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa & -\sin\omega\sin\varphi\sin\kappa + \cos\omega\cos\kappa & \sin\omega\cos\varphi \\ \sin\varphi & -\sin\omega\cos\varphi & \cos\omega\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

1. 因為旋轉矩陣為正交矩陣，設為 Q ，所以我們利用此項定理，可以把三維旋轉矩陣的旋轉矩陣 Q 轉變為 $(I + A)^{-1}(I - A)$ ：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \lambda(I + A)^{-1}(I - A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

其中， λ 為尺度因子； $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 為轉換前坐標系； $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ 為轉換後坐標系； $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

為平移量。

$$A \text{ 為反對稱矩陣，我們令 } A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix},$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}, \text{再藉由等號兩側同乘上}(I - A):$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2. 公式推導

將上式乘開移項，並藉由重心座標與觀測量相消的一系列計算過程：

觀測量：

$$f_{3n-2} = x_0 + cy_0 - bz_0 + \lambda x_n - \lambda cy_n + \lambda bz_n - x'_n - cy'_n + bz'_n = 0$$

$$f_{3n-1} = -cx_0 + y_0 + az_0 + \lambda cx_n + \lambda y_n - \lambda az_n + cx'_n - cy'_n - az'_n = 0$$

$$f_{3n} = bx_0 - ay_0 + z_0 - \lambda bx_n + \lambda ay_n + \lambda z_n - bx'_n + ay'_n - z'_n = 0$$

重心座標：

$$s1 = x_0 + cy_0 - bz_0 + \lambda x_s - \lambda cy_s + \lambda bz_s - x'_s - cy'_s + bz'_s = 0$$

$$s2 = -cx_0 + y_0 + az_0 + \lambda cx_s + \lambda y_s - \lambda az_s + cx'_s - cy'_s - az'_s = 0$$

$$s3 = bx_0 - ay_0 + z_0 - \lambda bx_s + \lambda ay_s + \lambda z_s - bx'_s + ay'_s - z'_s = 0$$

兩者相減：

$$f_{3n-2s} = \lambda x_{ns} - \lambda cy_{ns} + \lambda bz_{ns} - x'_{ns} - cy'_{ns} + bz'_{ns} = 0$$

$$f_{3n-s} = \lambda cx_{ns} + \lambda y_{ns} - \lambda az_{ns} + cx'_{ns} - y'_{ns} - az'_{ns} = 0$$

$$f_{3ns} = -\lambda bx_{ns} + \lambda ay_{ns} + \lambda z_{ns} - bx'_{ns} + ay'_{ns} - z'_{ns} = 0$$

那因為上述之公式內含有尺度因子的未知數，而尺度因子不須平差即可求得，所以我們會先解出尺度因子，再對上述之公式進行平差計算以求得旋轉因子 a、b、c

(1) 求解尺度因子

$$f_{3ns} \text{ 整理後得 } \rightarrow (\lambda y_{is} + y'_{is})a - (\lambda x_{is} + x'_{is})b = z'_{is} - \lambda z_{is}$$

$$f_{3n-2s} \text{ 把 } b \text{ 提出 } \rightarrow b = \frac{-\lambda x_{is} + \lambda c y_{is} + x'_{is} + c y'_{is}}{z'_{is} + \lambda z_{is}}$$

$$f_{3n-s} \text{ 把 } a \text{ 提出 } \rightarrow a = \frac{\lambda c x_{is} + \lambda y_{is} + c x'_{is} - y'_{is}}{z'_{is} + \lambda z_{is}}$$

將 a、b 代入 f_{3ns} 後得：

$$\lambda^2 x_{is}^2 + \lambda^2 y_{is}^2 - x'_{is}^2 - y'_{is}^2 = -\lambda^2 z_{is}^2 + z'_{is}^2$$

並將此式以平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 寫成：

$$\left(\lambda \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} - \sqrt{x'_{is}^2 + y'_{is}^2 + z'_{is}^2} \right) \times \left(\lambda \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} + \sqrt{x'_{is}^2 + y'_{is}^2 + z'_{is}^2} \right) = 0$$

可看出 λ 解為轉換前後重心座標平方和之相除成果，此階段並沒有用到平差：

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{x'_{is}^2 + y'_{is}^2 + z'_{is}^2}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2}}$$

(2) 求解旋轉因子 a、b、c

有了尺度之後，我們將尺度因子代回下列式子，就只剩下 a、b、c 三個旋轉因子未知數，即可對其進行平差（一組 xyz 座標可以列三條方程式，所以兩組以上即可解平差）：

$$f_{3n-2s} = Sx_{ns} - Scy_{ns} + Sb z_{ns} - x'_{ns} - cy'_{ns} + bz'_{ns} = 0$$

$$f_{3n-s} = Scx_{ns} + Sy_{ns} - Sz_{ns} + cx'_{ns} - y'_{ns} - az'_{ns} = 0$$

$$f_{3ns} = -Sbx_{ns} + Say_{ns} + Sz_{ns} - bx'_{ns} + ay'_{ns} - z'_{ns} = 0$$

可得平差方程式：

$$\begin{bmatrix} x'_{1s} - Sx_{1s} \\ y'_{1s} - Sy_{1s} \\ z'_{1s} - Sz_{1s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z'_{1s} + Sz_{1s} & -y'_{1s} - Sy_{1s} \\ -z'_{1s} - Sz_{1s} & 0 & x'_{1s} + Sx_{1s} \\ y'_{1s} + Sy_{1s} & -x'_{1s} - Sx_{1s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

即可求得 a、b、c 三個旋轉因子的最或是值(此階段即用到平差)

(3) 求解平移量

最後將λ、a、b、c 代入此式求得平移量：

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_s \\ y'_s \\ z'_s \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

有了旋轉矩陣、尺度因子、平移量的解，因此完成三維七參數轉換的線性解成果。

在實際上的情況下是有兩組觀測後的坐標，然後利用這兩組坐標求出七參數矩陣，最後在將轉換前的坐標套入此七參數矩陣，看得出來的轉換後坐標是否和觀測的坐標相近，如果殘差很小的話就表示這種線性算法是可行的，但是在這裡我們先使用自訂坐標的方法來確認這種方法的可行性，如果誤差很小的話再去套入真實坐標來計算。

再來就要利用真實世界的座標去進行計算，現在我們有七個點的點位，每個點位都有 Local 橢球參數和 WGS 全球橢球參數兩組座標系統，而我們的目的即是利用七個點位之兩組座標系統，去進行解算，推求出轉換之七參數後，再利用我們推求出的七參數轉換座標去轉換 Local 座標，得到 WGS 之最或是值座標，並與原先之 WGS 座標相減，可得到各組點位的三個維度之改正數，將其轉換為距離差後，並計算單位權中誤差，即可對其進行精度討論。

貳、仿射轉換參數非迭代解法

一、相似轉換線性化

再說明仿射轉換線性化之前，我會先從相似轉換的非迭代計算來說起，因為仿射轉換和相似轉換其實是很接近的，就是差在尺度因子上面，這在後面會做解釋，相似轉換其尺度是比較簡單的，因此我們就先從相似轉換的線性化來著手，當知道相似轉換非迭代計算後，也就能了解仿射轉換的非迭代計算了。

一般相似轉換的公式通常是以下列形式來表示：

$$\mathbf{x}' = s\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t}'$$

其中， $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 分別代表轉換前和轉換後的坐標； s 代表尺度因子； $\mathbf{R}$ 代表旋轉矩陣； $\mathbf{t}'$ 代表平移量。在這條式子中 $\mathbf{R}$ 是在轉換前的坐標基準下所定義，而平移量是在轉換後的坐標基準下所定義。

在三維的情況下，旋轉矩陣和平移量分別可以寫成：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\sin(r_z) & \cos(r_z) & 0 \\ \sin(r_z) & \cos(r_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & \cos(r_x) & \sin(r_x) \\ \sin(r_x) & \cos(r_x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} t'_x \\ t'_y \\ t'_z \end{bmatrix}$$

其中， r_x 、 r_y 和 r_z 分別代表三個方向旋轉的角度，而 t'_x 、 t'_y 和 t'_z 代表三個軸的平移量。因此，在相似轉換中我們就有 7 個轉換參數（一個尺度參數、三個旋轉參數和三個平移參數），因此我們最少需要觀測三組坐標來計算出轉換參數。

這條式子原本是非線性的，而現今的做法一般來說是線性化後使用迭代的方法來計算，但在這裡我試著使用非迭代的方法來完成轉換參數的計算。

首先先估計出尺度因子：

$$\hat{s} = \text{mean} \left(\frac{\|\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_{ji}\|}{\|\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_{ji}\|} \right) \quad (i \neq j)$$

其中， $\mathbf{dx}_{ij}$ 代表轉換前的坐標基準下不同坐標的坐標差； $\mathbf{dx}'_{ij}$ 代表轉換後的坐標基準下不同坐標的坐標差； $\hat{s}$ 為尺度估計值。尺度就是基底向量的伸縮，因此也可以用坐標差的長度變化來看，所以這邊我就用轉換前和轉換後的坐標差的比值來計算出尺度。

再來，利用最小二乘法的計算公式來計算出旋轉矩陣：

$$\hat{R} = \Delta X'^T \Delta X_s (\Delta X_s^T \Delta X_s)^{-1}$$

其中， ΔX_s 為轉換前的坐標基準下，乘上尺度後的坐標差的轉置所堆疊成的矩陣：

$$\Delta X_s = \hat{s} \begin{bmatrix} a_{13} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$\Delta X'$ 為轉換後得基準下，坐標差的轉置所堆疊成的矩陣：

$$\Delta X' = \begin{bmatrix} a_{13} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

坐標差可以讓平移參數被抵銷掉，讓平移參數不會參與平差計算。

當我們得到了估計出來的旋轉矩陣後，就能計算出旋轉角：

$$|r_y| = \left| \arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right) \right|$$

其中， r_{ij} 為估計出來的旋轉矩陣中的元素：

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} r_{21} & r_{22} & r_{23} \end{bmatrix}$$

最後就是估計平移量：

$$\hat{t} = \text{mean}(x' - \hat{s}\hat{R}x)$$

這樣就得到所有的相似轉換參數，也就完成了非迭代的計算，這種算法不使用迭帶來計算轉換參數，計算上會簡單很多。

二、 仿射轉換線性化

講解完了相似轉換非迭代的計算方式，接著就是來到仿射轉換的非迭代計算方式。

仿射轉換的轉換公式通常都是以下面這個形式來表示：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ y_0 \end{bmatrix}$$

但這裡我們為了知道尺度因子矩陣和旋轉矩陣，我們就將其拆開來寫：

$$x' = ERx + t'$$

其中， $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 分別代表轉換前和轉換後的坐標； E 代表尺度矩陣； R 代表旋轉矩陣； t' 代表平移量。

其和相似轉換最大的不同就是在尺度上面，相似轉換中的尺度是固定的，代表在轉換前和轉換後的單位基底向量都是互相垂直的，且其三個方向的伸縮量是一樣的。但是在仿射轉換中其尺度不是只有一個，仿射轉換後的三個方向的伸縮量不一定是一樣的，所以代表在三個主方向上有三個不同的尺度因子，而且轉換後其單位基底向量不是垂直的，代表其尺度會受三個方向的影響，因此就有了尺度矩陣 E 。

尺度矩陣 E 是一個對稱矩陣，因為尺度和方向是有相關性的，使其成為了一個對稱矩陣。而我們使用特徵值拆解法來將此矩陣拆解，變成由對角矩陣 Λ 和正交矩陣 S 所組成：

$$E = S\Lambda S^T$$

其中， Λ 的主對角線元素代表三個主方向的尺度因子，而這三個主方向又是由 S 所定義出來的。

三維仿射轉換中包含了 12 個轉換參數，其中有 6 個是在對稱尺度矩陣中；3 個是在旋轉矩陣中；3 個是平移量，為了解出這些轉換參數我們最少需要 4 組轉換前的坐標和轉換後的坐標，有了這四組坐標，我們就能計算出轉換參數。

在相似轉換中是先求出尺度因子，但是在仿射轉換中尺度因子不是固定的，不能直接求出來，因此我們回到最原始的轉換公式：

$$|y'| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} |y| + |y_0|$$

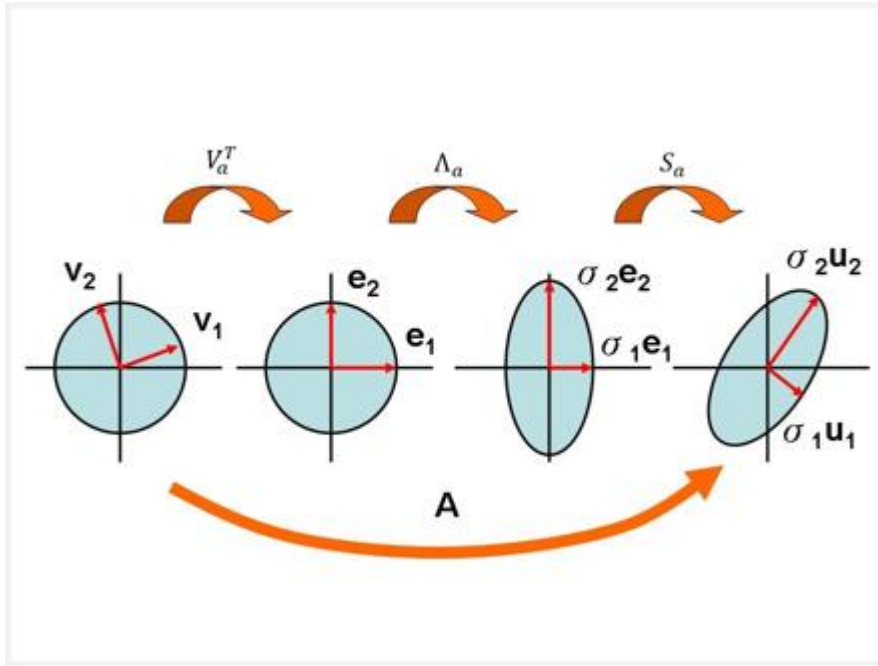
這裡我們先直接用最小二乘法來計算出 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ ，下面我們將此矩陣簡稱為 ER ：

$$ER = \Delta X'^T \Delta X (\Delta X^T \Delta X)^{-1}$$

這裡的計算方法就和相似轉換一樣，而計算出 A 矩陣後，我們可以將 A 矩陣使用奇異值拆解法來拆解，得到：

$$ER = S_a \Lambda_a V_a^T$$

其中， S_a 和 V_a 為兩個正交矩陣， Λ_a 為對角矩陣。而這些矩陣所代表的意義如下圖：



圖（2）奇異值拆解對於仿射轉換之意義

由上圖可以看到， V_a 所代表的意義就是旋轉， Λ_a 所代表的意義就是尺度的改變， S_a 所代表的意義也是旋轉。因此旋轉矩陣就可以估計為：

$$\hat{R} = S_a V_a^T$$

如此一來，尺度因子矩陣就可以估計為：

$$\hat{E} = S_a \Lambda_a S_a^T$$

最後，如同相似轉換一樣，求出平移量：

$$\hat{t}' = \text{mean}(x' - \hat{E} \hat{R} x)$$

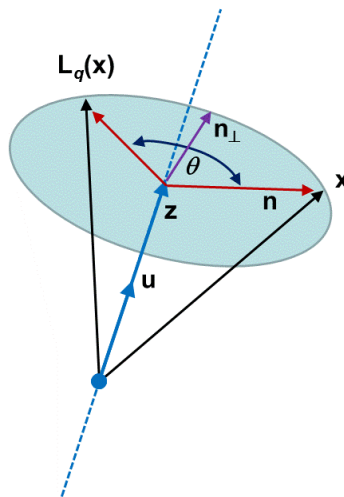
這樣就完成了仿射轉換的非迭代計算方法。

參、四元素轉換

一、四元素介紹

四元素轉換不同於常見的七參數轉換或是四參數轉換、仿射轉換，四元數轉換顧名思義是由四個元素所組成的旋轉矩陣，其在空間上的意義是某點或某向量對著與原點相交的某一向量做逆時針旋轉，它的優點在於並不會像七參數轉換會產生萬向鎖問題，且由於只有旋轉矩陣只有四個元素，因此它計算的速度也較快，存儲的空間也較小，因此四元素旋轉大量應用於軌道力學、表示三維物件的旋轉及方位的電腦繪圖及機器人上。

而四元素轉換也有使用在測量的領域上，目前四元素轉換於攝影測量領域中是用來方位與姿態角的解算，是十分有用且有效的運算方法，而若是四元素轉換用來做座標轉換是否也是可行的方法呢？為了驗證，本篇論文將探討可行性，通過兩種驗證、比對其他轉換方式去驗證四元素轉換是否可以使用在座標轉換上。



圖（3）四元素轉換於空間中的轉換方式

二、四元素基本形式

愛爾蘭數學家哈密頓將複數 $Z=e+fi$ ，其中 e, f 是實數， $i=\sqrt{-1}$ ，是虛數單位，延伸為四元數，即一個實數加上三個虛部，即 $q=e+fi+gj+hk$ ，後來羅德里格將四元素發展為一旋轉矩陣，其矩陣如下：

$$qxq^{-1} = \begin{bmatrix} e^2 + f^2 - g^2 - h^2 & 2fg - 2eh & 2fh + 2eg \\ 2fg + 2eh & e^2 - f^2 + g^2 - h^2 & 2gh - 2ef \\ 2fh - 2eg & 2gh + 2ef & e^2 - f^2 - g^2 + h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

且 $q=e+fi+gj+hk$ 也表示為 $q=\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})xi+\sin(\frac{\theta}{2})yj+\sin(\frac{\theta}{2})zk$

其中， (x, y, z) 為點繞其旋轉的向量； θ 為旋轉角度。

1. 推導 $q=\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})xi+\sin(\frac{\theta}{2})yj+\sin(\frac{\theta}{2})zk$

為了計算方便，將實數與虛數分開，即 $q=e+fi+gj+hk=e+v$ ，接著我們假設 q

為單位四元素，則 $\sqrt{e^2 + v^2}=1$ 。

假設

$$e^2=\cos^2(\frac{\theta}{2}) \quad |v|^2=\sin^2(\frac{\theta}{2})$$

則我們可以得到

$$e=\cos(\frac{\theta}{2}) \quad |v|=\sin(\frac{\theta}{2})$$

而因為 q 是單位四元素，因此 v 也必須是單位向量，因此令 $u=\frac{v}{\|v\|}$

$$v= \sin(\frac{\theta}{2})u, \text{ 且 } u=(x, y, z)$$

將其上綜合，可得 $q= \cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})xi+\sin(\frac{\theta}{2})yj+\sin(\frac{\theta}{2})zk$ 。

2. 推導 $qxq^{-1} = \begin{vmatrix} 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$

首先須知道四元數的基本公式：

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

$$Ij=k、jk=i、ki=j$$

$$Ji=-k、kj=-i、ik=-j$$

$$Q1 = A + B \quad Q2 = C + D$$

$$Q_1 Q_2 = (A + B)(C + D) = AC + AD + BC + B \times D - B \cdot D$$

為了計算方便，將實數與虛數部分分開：

$$q = e + fi + gj + hk = e + v$$

q^{-1} 為 q 的共軛向量：

$$q^{-1} = e - v$$

X 為待旋轉的點/向量，設其為實數為零的四元數 $(0 + X)$

$$\begin{aligned} X' &= qXq^{-1} \\ &= (e + V)(0 + X)(e - V) = (eX + V \times X - V \cdot X)(e - V) \\ &= e^2 X - e(V \times X) + eV \cdot X + e(V \times X) - (V \times X \times V + V \times X \cdot V) - e(V \cdot X) + (V \cdot X)V \\ &= (e^2 - |V|^2)X + 2(V \cdot X)V + 2e(V \times X) \end{aligned}$$

化成矩陣：

$$\begin{aligned} &(e^2 - |V|^2)X + 2(V \cdot X)V + 2e(V \times X) \\ &= (e^2 - |V|^2)X + 2(VV^T)X + 2e[V]X \\ &= [(e^2 - |V|^2)I + 2(VV^T) + 2e[V]]X \end{aligned}$$

分為三個矩陣，個別計算再將其合併：

$$\begin{aligned} (e^2 - |V|^2)I &= (e^2 - f^2 - g^2 - h^2)I \\ &= \begin{bmatrix} e^2 - f^2 - g^2 - h^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 - f^2 - g^2 - h^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 - f^2 - g^2 - h^2 \end{bmatrix} \\ &= 2(V \cdot V^T) = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f^2 & 2fg & 2fh \\ 2fg & 2g^2 & 2gh \\ 2fh & 2gh & 2h^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$2e[V] = 2e \begin{bmatrix} 0 & -h & g \\ h & 0 & -f \\ -g & f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2eh & 2eg \\ 2eh & 0 & -2ef \\ -2eg & 2ef & 0 \end{bmatrix}$$

合併的結果為：

$$\begin{aligned} & [(e^2 - |V|^2) I + 2(VV^T) + 2e[V]] X = \\ & \left(\begin{bmatrix} e^2 - f^2 - g^2 - h^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 - f^2 - g^2 - h^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 - f^2 - g^2 - h^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2eh & 2eg \\ 2eh & 0 & -2ef \\ -2eg & 2ef & 0 \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \begin{bmatrix} 2f^2 & 2fg & 2fh \\ 2fg & 2g^2 & 2gh \\ 2fh & 2gh & 2h^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} e^2 + f^2 - g^2 - h^2 & 2fg - 2eh & 2fh + 2eg \\ 2fg + 2eh & e^2 - f^2 + g^2 - h^2 & 2gh - 2ef \\ 2fh - 2eg & 2gh + 2ef & e^2 - f^2 - g^2 + h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上為四元素轉換旋轉矩陣的推導，若是在轉換過程中需要尺度亦或是平移量，則直接將尺度因子乘上旋轉矩陣，平移量直接加於式子後方即可。

以下為完整的四元素轉換公式：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} e^2 + f^2 - g^2 - h^2 & 2fg - 2eh & 2fh + 2eg \\ 2fg + 2eh & e^2 - f^2 + g^2 - h^2 & 2gh - 2ef \\ 2fh - 2eg & 2gh + 2ef & e^2 - f^2 - g^2 + h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

三、四元素轉換之轉換參數的解算

四元素轉換的形式如下：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$+s \begin{bmatrix} e^2 + f^2 - g^2 - h^2 & 2fg - 2eh & 2fh + 2eg \\ 2fg + 2eh & e^2 - f^2 + g^2 - h^2 & 2gh - 2ef \\ 2fh - 2eg & 2gh + 2ef & e^2 - f^2 - g^2 + h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

四元素轉換矩陣的轉換參數有 e 、 f 、 g 、 h 、 s 、 x_0 、 y_0 、 z_0 ，共有 8 個參數，而由上式可輕易的明瞭四元素轉換的旋轉矩陣為非線性，因此若是要從轉換前、轉換後的座標中去求得四元素轉換的轉換參數，需要使用泰勒級數展開式將其線性化，列平差方程式，以迭帶的方式求出四元素轉換轉換矩陣的參數。

然而，若是將 8 個參數都進行迭代，那迭代的時間將會非常長，因此為了節省計算時間，先將平移量給剔除，於迭代完成後再進行計算。

具體作法如下：

1. 將轉換前(A)、轉換後(B)所有座標扣除其轉換前、轉換後所有座標的平均值，如此可將平移量(T)消除。

$$(B - \bar{B}) + \varepsilon = s * R * (A - \bar{A}) + T$$

2. 於平差結束後，將計算得的轉換參數代入平移量式子，解出平移量。

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} e^2 + f^2 - g^2 - h^2 & 2fg - 2eh & 2fh + 2eg \\ 2fg + 2eh & e^2 - f^2 + g^2 - h^2 & 2gh - 2ef \\ 2fh - 2eg & 2gh + 2ef & e^2 - f^2 - g^2 + h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_A \\ \bar{y}_A \\ \bar{z}_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{y}_B \\ \bar{z}_B \end{bmatrix}$$

扣除平移量後的參數只剩餘 5 個，然而，由於將尺度因子代入迭代計算會使的解算成果錯誤，因此先行將尺度因子乘入四元素的旋轉矩陣。

$$s \begin{bmatrix} e^2 + f^2 - g^2 - h^2 & 2fg - 2eh & 2fh + 2eg \\ 2fg + 2eh & e^2 - f^2 + g^2 - h^2 & 2gh - 2ef \\ 2fh - 2eg & 2gh + 2ef & e^2 - f^2 - g^2 + h^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e'^2 + f'^2 - g'^2 - h'^2 & 2f'g' - 2e'h' & 2f'h' + 2e'g' \\ 2f'g' + 2e'h' & e'^2 - f'^2 + g'^2 - h'^2 & 2g'h' - 2e'f' \\ 2f'h' - 2e'g' & 2g'h' + 2e'f' & e'^2 - f'^2 - g'^2 + h'^2 \end{bmatrix}$$

如此，四元素轉換矩陣變為：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} =$$

$$+ \begin{bmatrix} e'^2 + f'^2 - g'^2 - h'^2 & 2f'g' - 2e'h' & 2f'h' + 2e'g' \\ 2f'g' + 2e'h' & e'^2 - f'^2 + g'^2 - h'^2 & 2g'h' - 2e'f' \\ 2f'h' - 2e'g' & 2g'h' + 2e'f' & e'^2 - f'^2 - g'^2 + h'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

接著使用泰勒級數展開式將其線性化，列平差方程式並進行迭代。

線性化後的四元素轉換平差方程式為：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + V = \begin{bmatrix} e_0'^2 + f_0'^2 - g_0'^2 - h_0'^2 & 2f_0'g_0' - 2e_0'h_0' & 2f_0'h_0' + 2e_0'g_0' \\ 2f_0'g_0' + 2e_0'h_0' & e_0'^2 - f_0'^2 + g_0'^2 - h_0'^2 & 2g_0'h_0' - 2e_0'f_0' \\ 2f_0'h_0' - 2e_0'g_0' & 2g_0'h_0' + 2e_0'f_0' & e_0'^2 - f_0'^2 - g_0'^2 + h_0'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x'}{\partial e'}\right)_0 \left(\frac{\partial x'}{\partial f'}\right)_0 \left(\frac{\partial x'}{\partial g'}\right)_0 \left(\frac{\partial x'}{\partial h'}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial y'}{\partial e'}\right)_0 \left(\frac{\partial y'}{\partial f'}\right)_0 \left(\frac{\partial y'}{\partial g'}\right)_0 \left(\frac{\partial y'}{\partial h'}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial z'}{\partial e'}\right)_0 \left(\frac{\partial z'}{\partial f'}\right)_0 \left(\frac{\partial z'}{\partial g'}\right)_0 \left(\frac{\partial z'}{\partial h'}\right)_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} de \\ df \\ dg \\ dh \end{bmatrix}$$

接著進行迭代計算：

1. 給予未知數一組近似值 e'_0 、 f'_0 、 g'_0 、 h'_0 。
2. 將近似值代入線性化之方程式中求解該未知點之修正數 de 、 df 、 dg 、 dh 。
3. 更新未知數知近似值(新近似值=原近似值+修正數)
4. 重複步驟 2. 到 3.，直到未知數的修正數等於 0 或小於某誤差極限值(在此設定為 0.000001)

迭代結束後，即計算出四元素轉換中的 e'_0 、 f'_0 、 g'_0 、 h'_0 。

接下來要把尺度因子提出，由於由於單位四元素的長度平方表示尺度為 1 的狀態，即 $e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 1$ ，因此將計算出來的四個參數代入 $e^2 + f^2 + g^2 + h^2$ 即可計算出尺度因子為何，再將計算出來的旋轉矩陣四個參數除以 $\sqrt{\text{尺度因子}}$ ，即可求得單位四元素 e 、 f 、 g 、 h 。

將 e 、 f 、 g 、 h 、 s 代入平移量的計算式子，即可解得平移量。

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} e^2 + f^2 - g^2 - h^2 & 2fg - 2eh & 2fh + 2eg \\ 2fg + 2eh & e^2 - f^2 + g^2 - h^2 & 2gh - 2ef \\ 2fh - 2eg & 2gh + 2ef & e^2 - f^2 - g^2 + h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_A} \\ \overline{y_A} \\ \overline{z_A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overline{x_B} \\ \overline{y_B} \\ \overline{z_B} \end{bmatrix}$$

至此求得 e 、 f 、 g 、 h 、 s 、 T_x 、 T_y 、 T_z ，完成四元素轉換轉換參數的解法。

肆、檢驗四種轉換方式的精度優異

接下來會使用兩種方法來模擬四種轉換方法的轉換情形。

一、模擬數據以檢驗四種方法的轉換結果精度

此方法的目的是為了要檢驗何種換轉方式的精度最優。

此方法為先自訂兩組座標，一組轉換前，一組轉換後，轉換後座標為使用設計過得的 s 、 ω 、 φ 、 k 、 x_0 、 y_0 、 z_0 （附於下表），將其轉換成各自轉換方法所使用的參數去做轉換得到轉換後座標。

因為真實的轉換情形中觀測量是存在偶然誤差的，因此為了更接近真實情況，於轉換後座標後面再加上符合常態分布的偶然誤差，接著撰寫程式，使用平差方法計算將各轉換方法的轉換前座標與轉換後座標的轉換參數，最後將平差解算出來的轉換參數代入轉換公式裡，得到轉換後座標的最或是值，並計算其單位權中誤差。

且為了使加入的偶然誤差確實的分布在常態曲線上，將上述平差進行100次，將每次的單位權中誤差平均，並比較各轉換方式的精度。

且為驗證各轉換方式在尺度、四元素、平移量的轉換精度是否優良，在此設計了一些轉換方法，分別改變尺度、微尺度、四元素、平移量，共有15種轉換結果，如下圖，最後查看各轉換方式的精度的變化情況。

表（1） CaseA. 尺度因子大幅度變動

	尺度	ω	φ	k	T_x	T_y	T_z
CaseA-1	1.002	0.0003	-0.0001	0.0002	0.5	-0.02	0.03
CaseA-2	1.02	“	“	“	“	“	“
CaseA-3	2.04	“	“	“	“	“	“
CaseA-4	10.2	“	“	“	“	“	“

表（2）
CaseB.
旋轉角
變動

	尺度	ω	φ	k	T_x	T_y	T_z
CaseB-1	1.002	0.003	-0.001	0.002	0.5	-0.02	0.03
CaseB-2	“	0.3	-0.1	0.2	“	“	“

CaseB-3	“	3	-1	2	“	“	“
CaseB-4	“	30	-10	20	“	“	“

表（3） CaseC. 平移量變動

	尺度	ω	φ	k	T_x	T_y	T_z
CaseC-1	1.002	30	-10	20	5	-0.2	0.3
CaseC-2	“	“	“	“	50	-2	3
CaseC-3	“	“	“	“	500	-20	30

表（4） CaseD. 尺度因子小幅度變動

	尺度	ω	φ	k	T_x	T_y	T_z
CaseD-1	1.0002	30	-10	20	0	0	0
CaseD-2	1.00002	“	“	“	“	“	“
CaseD-3	1.000002	“	“	“	“	“	“
CaseD-4	1.0000002	“	“	“	“	“	“

以下為此
方法的詳

細步驟。

1. 設計轉換前、轉換後座標

隨機定義一百組三圍空間座標 (x, y, z) ，稱為 A，使用各轉換方式進行轉換，其轉換矩陣參數參照上述的參數設計表，得另一轉換後的一百組座標，稱為 B。

2. 加入符合高斯分佈曲線的誤差，以模擬真實座標轉換情形

使用 matlab 於 B 後加上符合高斯分佈曲線的偶然誤差，其誤差的單位權中誤差為 0.01m。（註：照理說轉換前、轉換後的座標皆有偶然誤差，但是為了計算方便，將誤差都移至轉換後座標。

$$B + \varepsilon = S * R * A + T$$

3. 使用平差技巧，先進行除錯。再進行第二次平差

若是某座標的誤差大於三倍單位權中誤差，如果將其考慮進去進行平差的話，其結果精度將會較差，因此須將其剔除。

由於需要使用單位權中誤差，因此需先進行一次平差，解得單位權中誤差，並將有錯誤的座標剔除。

4. 進行第二次平差，求得坐標最或是值、單位權中誤差

刪除錯誤後，將無錯誤的坐標進行第二次平差，求得正確的旋轉矩陣參數最或是值，並將轉換參數最或是值代入程式，得到轉換後座標最或是值，並計算單位權中誤差。

5. 使結果更接近真實情形

雖然從 matlab 加入的偶然誤差是符合高斯常態分布曲線，但是因為我們只有 100 組自定點位，也就是加入 300 個誤差，此 300 個誤差可能並不均勻的分佈在高斯分佈曲線上，所以為了要讓我們設定的偶然誤差更均勻的分佈在高斯常態曲線，得到最佳的結果，因此設計程式，將步驟(2)、(3)重複操作 100 次，並將 100 次的單位權中誤差取平均，這樣解得的單位權中誤差是建立在偶然誤差是均勻分布在高斯常態分部曲線的基礎上，其結果會更接近真實情形。

6. 分析

將七參數轉換、仿射轉換、四元素轉換、卡雷七參數轉換做比較，分析何種轉換方式較優異。

二、 使用真實世界中的座標去檢驗四種轉換方式的精度

雖然於上一個方法中已驗證過各轉換方式與精度優異，但畢竟是自訂座標，因此在此將真實世界中的座標去做轉換，驗證在真實世界中其轉換方式的精度是否與一致。

此方法為用各種轉換方式去計算真實世界中分別由 local 與 wgs84 定義的兩組座標（C、D）的轉換參數最或是值，並以此轉換參數最或是值代入各轉換方式去計算轉換後座標最或是值與單位權中誤差，並分析各轉換方式轉換後座標最或是值與單位權中誤差。

表（5） 轉換前座標(Local)

	x(m)	y(m)	z(m)
--	------	------	------

第一組	4157222.543	664789.307	4774952.099
第二組	4149043.336	688836.443	4778632.188
第三組	4172803.511	690340.078	4758129.701
第四組	4177148.376	642997.635	4760764.8
第五組	4137012.19	671808.029	4791128.215
第六組	4146292.729	666952.887	4783859.956
第七組	4138759.902	702670.738	4785552.196

表(6) 轉換後座標(wgs84)

	x(m)	y(m)	z(m)
第一組	4157870.237	664818.678	4775416.524
第二組	4149691.049	688865.785	4779096.588
第三組	4173451.354	690369.375	4758594.075
第四組	4177796.064	643026.7	4761228.899
第五組	4137659.549	671837.337	4791592.531
第六組	4146940.228	666982.151	4784324.099
第七組	4139407.506	702700.227	4786016.645

以下為此方法的詳細步驟：

1. 將 local 與 wgs84 的兩組座標匯入程式
2. 使用平差技巧，先進行除錯。再進行第二次平差

若是某座標的誤差大於三倍單位權中誤差，如果將其考慮進去進行平差的話，其結果精度將會較差，因此須將其剔除。

由於需要使用單位權中誤差，因此需先進行一次平差，解得單位權中誤差，並將有錯誤的座標剔除。

3. 進行第二次平差，求得坐標最或是值、單位權中誤差

刪除錯誤後，將無錯誤的坐標進行第二次平差，求得正確的旋轉矩陣參數最或是值，並將轉換參數最或是值代入程式，得到轉換後座標最或是值，並計算單位權中誤差。

4. 與七參數轉換、仿射轉換、卡雷轉換做比較，分析何種轉換方便較優異。

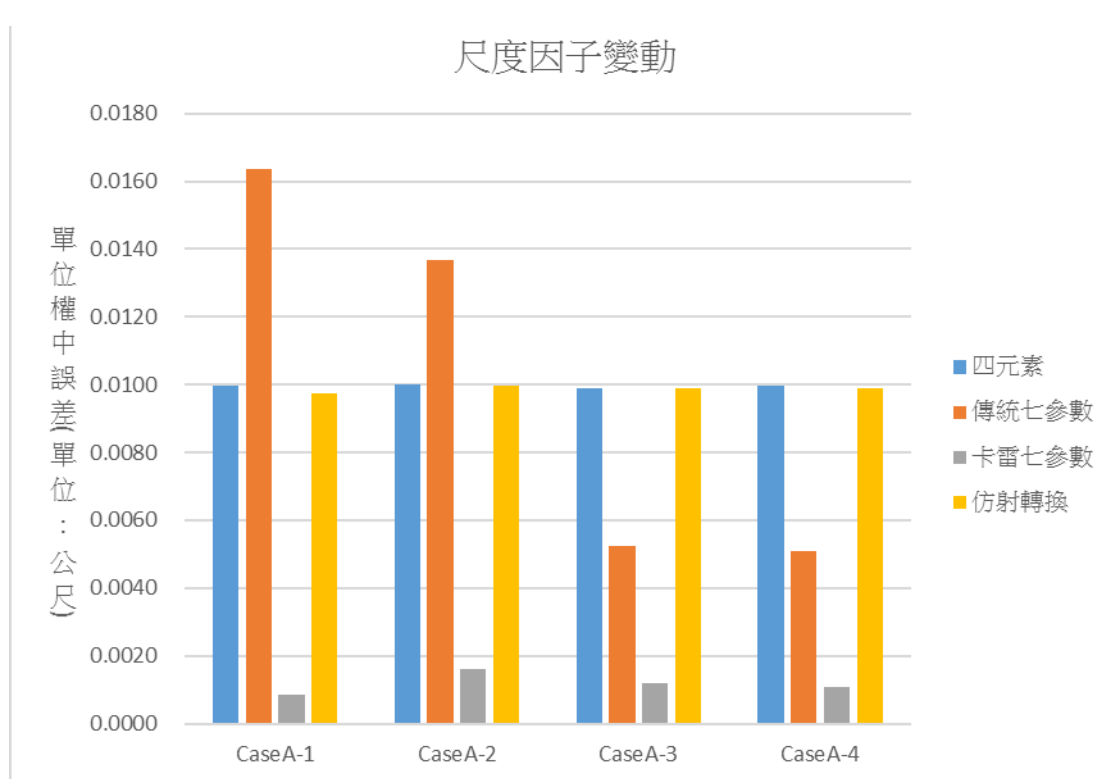
伍、成果與分析

一、模擬數據與其轉換成果分析

為了得知四種轉換方式在不同的轉換參數下，精度會如何改變，我們將分成四個 case：尺度改變、旋轉角改變、平移量改變、微尺度改變四組變動方式去進行分析，以便找出四種轉換方法中最佳之方式。

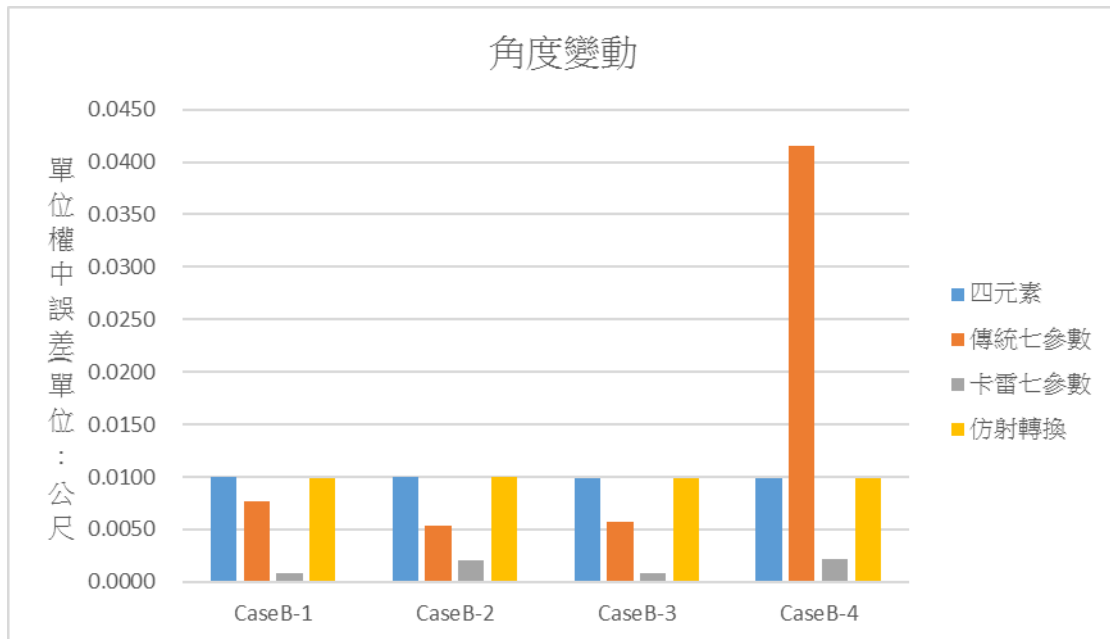
1. 模擬參數與其轉換成果分析

表（7）改變尺度因子情況下各轉換方式的精度



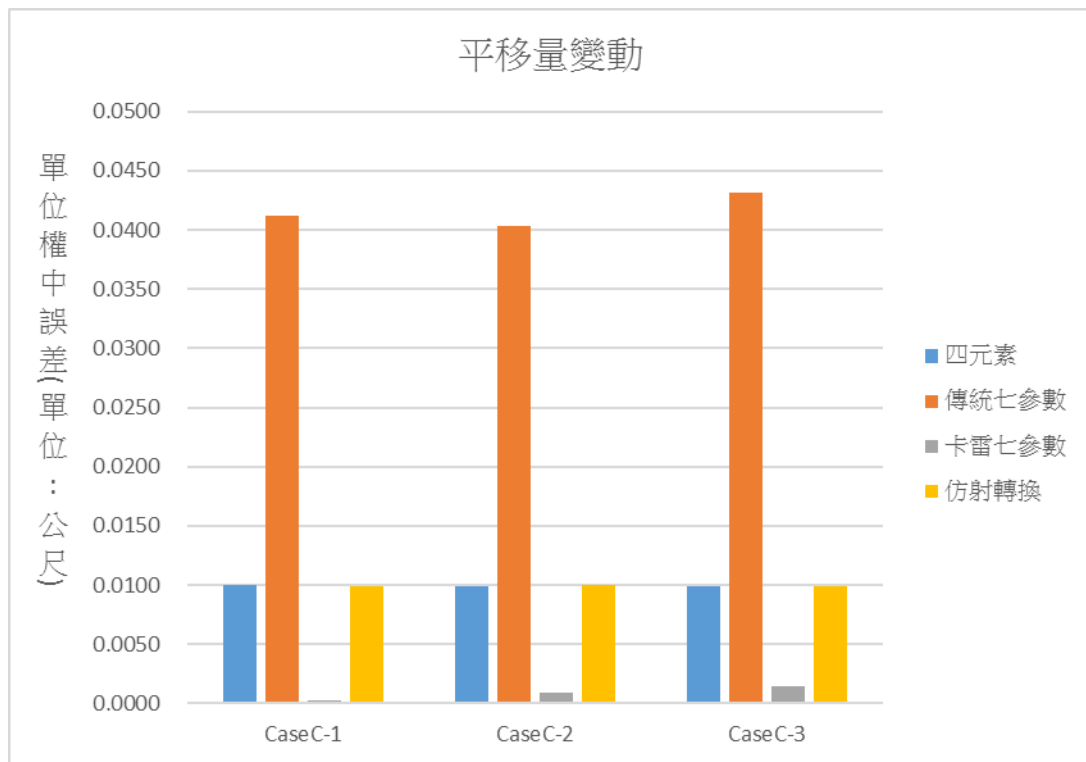
四元素、仿射轉換、卡雷七參數的結果不太會受到尺度變動的影響，而傳統七參數則是在尺度因子較小的情況下，精度會比較差，原因是因為尺度因子迭代修正量起始值是 1，所以在修正量給比較大的情況下，尺度會比較容易達到 2.04 與 10.2，而 1.02 與 1.002 則是因為小數點的關係，所以會有迭代次數過多造成精度不佳的現象發生。

表 (8) 改變旋轉角情況下各轉換方式的精度



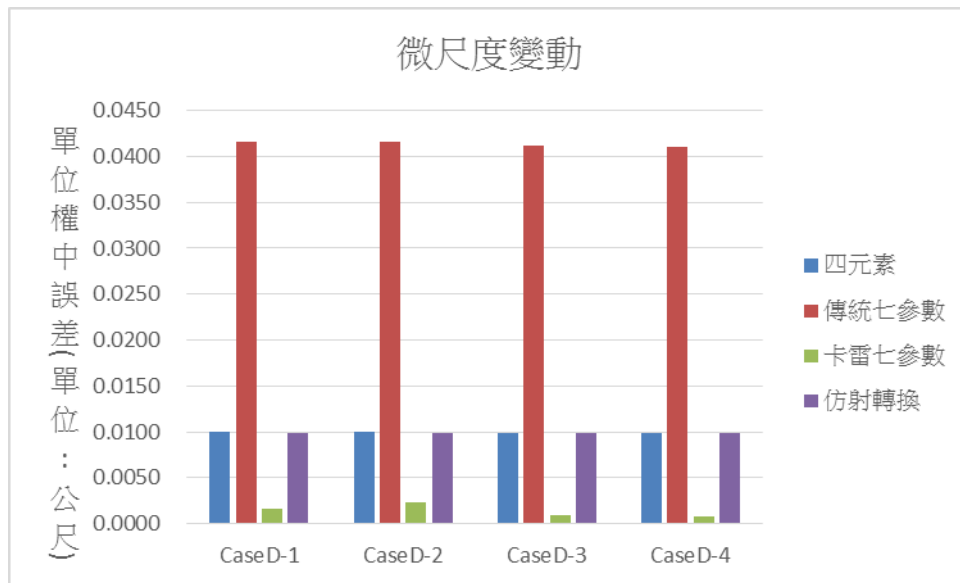
原則上除了傳統七參數以外的轉換方式也不太會受到角度變動的影響，而傳統七參數的精度會在第八組變差是因為，第 8 組自定轉換參數三軸是 30、-10、20 度，而迭代修正量起始值是 0.0002、0.00001、0.00001，所以傳統七參數在自定參數旋轉角較小的(第 5、6、7 組)條件下，精度可以媲美四元素、仿射等轉換方式，但因為第 8 組的轉換參數是 30、-10、20 度，所以會出現迭代結果不佳的現象。

表（9）改變平移量情況下各轉換方式的精度



傳統七參數以外的轉換方式不會受到平移量變動的影響，而傳統七參數也沒有因為平移量變大而精度變差，而精度普遍不佳則是由於角度參數的給定都是 30、-10、20 度，所以造成精度的結果都在四公分以上。

表 (10) 改變小尺度情況下各轉換方式的精度



此情況與平移量變動相似，傳統七參數以外的轉換方式不會受到微尺度變動的影響，而傳統七參數也沒有因為微尺度越小而精度變差，而精度普遍不佳則是由於角度參數的給定都是 30、-10、20 度，所以造成精度的結果都在四公分以上。

2. 模擬參數之轉換成果整體分析

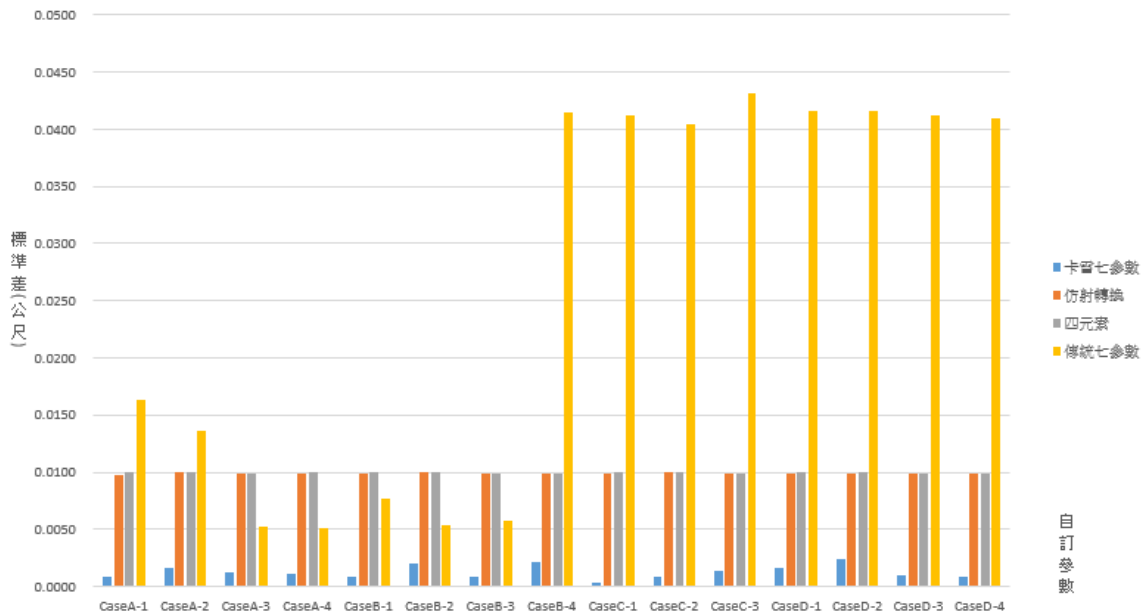
我們四個人各自利用四種不一樣的轉換方式(傳統七參數、線性卡雷解七參數、四元素轉換、仿射轉換)，對相同的自訂 100 組坐標去進行轉換，並自行模擬亂數(作為隨機誤差)，將其加在轉換後的座標上，當作隨機誤差。

在坐標上加入誤差後，即可對方程式進行第一次平差計算後，剔除改正數大於三倍中誤差之可能粗差，再進行第二次平差計算，以得到較為準確之平差結果。

而為了要讓平差得到的結果更加符合常態分布的情況，所以我們會讓整個程式連續跑 100 次迴圈，其用意是因為每跑一次迴圈都會產生一組隨機的亂數(當作隨機誤差)，並將亂數加到座標上，如此一來，100 組的座標跑 100 次迴圈，就會有 100 次的平差，才能讓亂數結果分散，使之接近常態分布的情況。

也為了得知轉換參數對精度的影響量，我們設定了 15 組的自訂參數，是透過改變尺度大小、旋轉角大小、平移量大小來獲得的 15 種不同參數組合，利用此組合我們可以得到轉換前後的座標真值，再加上自定的偶然誤差後，對其進行平差解算，可以得到轉換後座標最或是值，並與原先的座標真值相減，可得到各組點位的三個維度之改正數，將其轉換為距離差後，即可對其進行精度討論，成果如下：

表 (11) 所有 case 的各轉換方式精度



可以看出卡雷七參數為精度最高的方法，仿射轉換與四元素轉換的成果相近，而傳統七參數的轉換結果則飄忽不定，精度最差。卡雷是線性解，不需進行迭代，所以精度會最高。

仿射轉換雖然也是線性解，但是因為仿射轉換的優點是在轉換參數為未知的條件下，其解算結果會比較好，而我們在模擬前後座標的過程中卻需要給定已知的轉換參數，也就是說，在此階段我們無法發揮仿射轉換的優點(也就是將尺度因子分解成三個維度的尺度因子)，且其平差的過程會比卡雷七參數解法還要複雜，誤差傳播的結果，造成其精度會差一些。

傳統七參數因為近似值給定的關係，所以精度會有上述看到的飄忽不定情況，而如果經過仔細地分析，我們可以發現傳統七參數的誤差結果在第八組自訂參數開始後精度會突然變差，原因是因為第八組之後的旋轉角參數會突然變得很大，所以在迭代初始值設定極小的條件下，可能會有精度變差的現象，而前七組的精度較佳是因為前七組變動的參數是尺度，而尺度變動對迭代的影響沒有旋轉角這麼顯著，所以才會有這樣的效果。

四元素也需要迭代，而迭代就需要給定近似初始值，如果初始值給得不夠好的話，就會影響到精度，但是因為四元素的迭代條件是要比較單位四元素乘上尺度因子的函數，所以並不會受到初始給定之旋轉角大小的影響，換句話說，單位四元素與尺度因子的函數，其值不會太大，所以迭代的過程比較不會有發散的情形。

二、套入真實坐標與其轉換成果分析

在得到模擬參數後的轉換成果後，我們知道我們四個人的轉換方式都是可行的，因此接下來我們將使用真實坐標來進行坐標轉換，看看我們各個轉換方式在套入真實坐標後是否也是可行的。

1. 套入真實坐標與其轉換成果

表（12）各轉換方式於第一組坐標的轉換後坐標其最或是值之比較

第一組	轉換前座標	x	y	z
	local system	4157223	664789.3	4774952.099
	轉換後座標	x	y	z
	wgs84	4157870	664818.7	4775416.524
	與x座標差值	與y座標差	與z座標差	與座標距離(m)
四元素	0.093989122	0.13511	0.140223	0.21622007
傳統七參數	0.098001581	0.135356	0.150331	0.224777217
卡雷	-0.09651765	-0.126611	-0.139275	0.211526432
仿射	0.013979841	0.013806	0.019154	0.027439923

表（13）各轉換方式於第二組坐標的轉換後坐標其最或是值之比較

第二組	轉換前座標	x	y	z
	local system	4149043	688836.4	4778632.188
	轉換後座標	x	y	z
	wgs84	4149691	688865.8	4779096.588
	與x座標差值	與y座標差	與z座標差	與座標距離(m)
四元素	0.058815969	0.049699	0.013708	0.078212546
傳統七參數	0.054631148	0.049153	0.00364	0.073578668
卡雷	-0.05484536	0.03909	-0.015684	0.069152054
仿射	0.057868612	0.047306	0.011807	0.075670344

表 (14) 各轉換方式於第三組坐標的轉換後坐標其最或是值之比較

第三組	轉換前座標	x	y	z
	local system	4172804	690340.1	4758129.701
	轉換後座標	x	y	z
	wgs84	4173451	690369.4	4758594.075
	與x座標差值	與y座標差	與z座標差	與座標距離(m)
四元素	0.039897496	0.087946	0.008063	0.096908382
傳統七參數	0.07850389	0.101959	0.05909	0.141598877
卡雷	0.02498814	0.076142	0.022378	0.083203052
仿射	0.022247845	0.017235	0.030706	0.04165168

表 (15) 各轉換方式於第四組坐標的轉換後坐標其最或是值之比較

第四組	轉換前座標	x	y	z
	local system	4177148	642997.6	4760764.8
	轉換後座標	x	y	z
	wgs84	4177796	643026.7	4761228.899
	與x座標差值	與y座標差	與z座標差	與座標距離(m)
四元素	0.020202009	0.021981	0.087419	0.092375917
傳統七參數	0.013893385	0.029751	0.079496	0.086009905
卡雷	-0.03856361	0.047796	0.09964	0.117046031
仿射	0.003078647	0.011521	0.030976	0.033191968

表 (16) 各轉換方式於第五組坐標的轉換後坐標其最或是值之比較

第五組	轉換前座標	x	y	z
	local system	4137012	671808	4791128.215
	轉換後座標	x	y	z
	wgs84	4137660	671837.3	4791592.531
	與x座標差值	與y座標差	與z座標差	與座標距離(m)
四元素	0.091891703	0.013928	0.00549	0.093103247
傳統七參數	0.065571888	0.024796	0.02788	0.075444033
卡雷	0.105422401	-0.011006	-0.006415	0.10618932
仿射	0.041213504	0.004943	0.033895	0.053589818

表（17）各轉換方式於第六組坐標的轉換後坐標其最或是值之比較

第六組	轉換前座標	x	y	z
	local system	4146293	666952.9	4783859.956
	轉換後座標	x	y	z
	wgs84	4146940	666982.2	4784324.099
	與x座標差值	與y座標差	與z座標差	與座標距離(m)
四元素	0.011816707	0.006529	0.054622	0.056265352
傳統七參數	0.00548568	0.012743	0.029657	0.032741066
卡雷	0.017973061	0.00025	0.048492	0.051716149
仿射	0.030561387	0.012706	0.003879	0.033324019

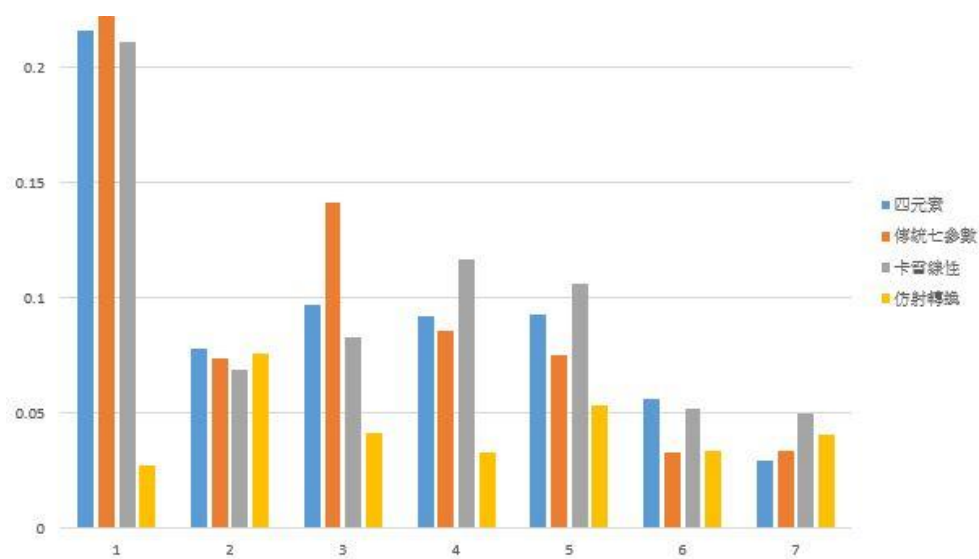
表

第七組	轉換前座標	x	y	z
	local system	4138760	702670.7	4785552.196
	轉換後座標	x	y	z
	wgs84	4139408	702700.2	4786016.645
	與x座標差值	與y座標差	與z座標差	與座標距離(m)
四元素	0.029401195	0.004059	0.001662	0.029726537
傳統七參數	0.030446636	0.008181	0.010889	0.033354098
卡雷	0.041543017	-0.025661	-0.009137	0.049676681
仿射	0.014067521	0.010135	0.037093	0.040945533

表（18）各轉換方式單位權中誤差

四元素	0.022965076m
傳統七參數	0.025485416m
卡雷	0.023183328m
仿射	0.012611527m

表（19）各轉換方式中，七個轉換後坐標的最或是值與真值在空間中的距離



2. 真實坐標套入各轉換參數之分析

接下來分析轉換由 LOCAL、WGS84 所定義出來的 7 個相同座標，因為是由不同定義定義出來的，所以雖然座標值是不同，但都是表示同一個點，就像 twd67 與 twd97 的關係，而我們分別使用四元素轉換、七參數轉換、卡雷轉換、仿射轉換，去找出兩種座標之間的關係，接著去驗證何種轉換方式轉換出來的座標較為精確。

觀察整體的精度可以發現，四種轉換方式所得出來的精度皆是遜於使用自定座標的，這邊我們認為是因為，WGS84、LOCAL 的兩種座標皆是由較複雜的定義去得到的，不像使用自訂座標時是直接使用轉換公式轉換再加上自定的偶然誤差去得到轉換後座標，因此，兩種座標中，不同區域的座標可能會有些微不同的轉換趨勢，只有在給予點數及多的情況下才可得到其精準的規律，也就是精準的轉換參數，但是我們的座標只有 7 個，因此較難去找出其中的規律，才會導致我們的精度皆不如使用自定參數時。

而其中，仿射轉換轉換得來的座標與真值座標得距離差是優於其他轉換方法，四元素轉換、七參數轉換、卡雷轉換的精度又以四元素轉換最優，七參數轉換次之，卡雷轉換居末，但是差值都差異不大，我們認為這與轉換中的參數數量、轉換矩陣考慮的尺度、多於觀測量的多寡有關。

轉換矩陣中的參數若是較多的話，那表示在轉換時會考量到較多的面向，仿射轉換中的參數有 9 個，四元素轉換旋轉矩陣的參數有 8 個，七參數轉換旋轉矩陣的參數有 7 個，卡雷轉換旋轉矩陣的參數有 7 個，且不只參數較多，仿射轉換考慮到的尺度因子是 x 、 y 、 z 軸三個維度的，不似其他三種轉換方式只考慮一個方向。

而座標數量若是越多，代表我們可以從更多的座標中去找出其中的規律，在這條件下，仿射轉換因為有較多的參數且考慮的尺度也較多元，因此它能夠如此不堪的情況下做出比其他轉換方式更為精準的座標轉換。

而從單個點的精度去查看可以發現，除了仿射轉換的精度都很優秀以外，其餘的轉換方式轉換而來的七個座標的精度皆忽小忽大，無法找出其規律，而我們經過討論，得出的結果也是因為座標數量太少與轉換參數考慮的面向多寡，我們的解釋與上面整體的分析一樣，因為兩種座標皆是由較複雜的定義去得到的，因此不同區域的座標可能會有不同的趨勢，例如可能某組座標在兩種定義間的轉換規律是些微偏向 Z 軸方向，某組座標在兩種定義間的轉換規是些微偏向 X 軸的，因此在座標

數量極少的情況下是很難得出其精準規律的，且三種轉換方式的參數考量的面向也不似仿射轉換的多，尺度因子更是少了兩個方向，所以轉換出來的座標可能有些剛好 match 到其規律，有些則沒有，因此七個點位的精度才會忽大忽小。