

南投縣政府 114 年度研究報告

應用純數二元二次聯立方程式解析以後方交會模式求測站坐標

研究人

服務單位：草屯地政事務所

研究人員：李金輝 梁崇智

中華民國 114 年 3 月 14 日

南投縣政府 114 年度研究報告摘要表

研究報告名稱	應用純數二元二次聯立方程式解析以後方交會模式求測站坐標
研究單位及人員	草屯地政事務所：李金輝、梁崇智
研究起迄年月	113 年 1 月~113 年 12 月
研究緣起與目的	<p>土地複丈業務為地政事務所最繁複且涉及民眾權益之主要業務，但由於絕大部份人對圖根點重要性缺乏認知及法令保護，以本所轄區草屯鎮為例，近年因城市發展建設，電力、電信、瓦斯、自來水……等地下管線工程施作，以及道路翻修、人行道之鋪設與綠化，使得原埋設圖根點幾乎損毀殆盡。</p> <p>本研究希望能將圖根永續方式做一個延續性之推展，印證以不同數學模式所呈現之成果來做客觀分析，期望以科學的方式將此經驗及結果能提供參考價值。</p>
研究方法與過程	<p>(一)、研究範圍選定：本研究區範圍之選定，主要是考量該地區已辦理過數值地籍測量，該區為地籍調查有指實界地區，該區尚有原圖根點可供檢核驗證，除以上條件外就是其所在區域為市區巷道內 e-gnss 容易被遮蔽地形。</p> <p>(二)、研究過程：1、研究模式選定：本試驗模式是採用二元二次聯立方程式，以純數概念去推導出向量幾何結構關係。2、靜態模型測試：首先將資料庫現有重測區檔案內已知點幾何關係先萃取出來，這些萃取出彼此間的幾何關係資料就視為標準件。而這些標準件除了要與靜態模式所推導出資料匹配比較，也要作為與現場實測解算資料做類似後驗檢核。3、現場動態測試：現場實際測量及驗證解算坐標與標準件差異，本次驗證兼採以經緯儀本身內建後方交會模式求坐標方式，另一方式則以本研究二元二次聯立方程式方式求取坐標，最後再以這兩種方式分別與標準件做比較，借以分析出此數學模式下可靠度。4、建立各個觀測資料分析樣本。5、資料庫資料互相檢驗。6、幾何結構較差實證分析。7、提出結論及建議。</p>

研究發現與建議	<p>研究發現：經由以上實測分析中發現一項值得參考的訊息，就是若以彼此間距離所產生之結構，依二元二次聯立方程式所解算出坐標值與標準件較差，比經緯儀以傳統後方交會模式所解算坐標差異較小，這種現象的發生將隨著角度變化而跟著改變。</p> <p>研究建議：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 依本次研究區域，二元二次聯立方程式所解算出的坐標成果尚佳，距離測量若以正倒鏡施測來提升精度，應更能符合地籍測量所使用。 2. 應用此方法由於依據彼此距離所形成之結構為解算基礎，建議現場宜採取 4 段以上的距離基準，並適時以不同觀測值交互計算檢查成果是否有差異。 3. 本試驗區交會之已知點為原先所佈設完成，因此各點位皆有已知坐標，建請作業單位可以有計畫性針對適合且需要地區預先規劃。 4. 經由此次研究分析，爾後或可嘗試以現場存在之原地籍調查表確定界址為應用。 5. 本次研究同時兼以傳統後方交會模式計算，經由分析比較，該模式下角度過於尖銳或偏向同一象限時，所解算之坐標差異隨之變大，供使用此模式者參考。
選擇獎勵	<input checked="" type="checkbox"/> 行政獎勵 <input type="checkbox"/> 奬勵金

應用純數二元二次聯立方程式解析以後方交會模式求測站坐標

Apply Mathematics binary quadric form analysis to solve the instrumental station coordinates using the resection mode

¹李金輝 ²梁崇智

摘要

圖根點為辦理數值區土地複丈業務之基準，惟近來本所轄區數起公共建設造成所謂永久性圖根點不再永久，因此從源頭改變方式建構永久性圖根點概念，實為本所目前應思考重要課題。因此若能建構前述的現場建物特徵，以較永久性建物及設施(非地面)為已知標的點，爾後只要在該標的點附近自由擺設測站，就能快速得到測站坐標，此也為傳統後方交會基本概念。

前述相關作業方式已討論多年，業界也有一些廣泛作法，如後方交會法、自由測站、e-gnss 等方式。惟本試驗樣本是採用二元二次聯立方程式，以純數概念去推導出向量結構關係，期待能以快速、簡化並能立刻得到可用之相對應坐標，而且不受都市內密集巷道及房屋遮蔽所影響為實驗目的。

經研究結果顯示，經現場以二元二次聯立方程式解算與經緯儀後方交會功能分析比較結果，在不同測站及各個不同角度下所呈現結果差異性略有不同。依本次 4 個測試場域，以經緯儀功能操作後方交會模式下，當角度較尖銳時，其誤差量將隨之增大，另以純數二元二次聯立方程式解算則受夾角及幾何圖形影響較小。

關鍵字：純數、二元二次聯立方程式、後方交會、自由測站、e-gnss

¹李金輝，南投縣草屯地政事務所第二課課長

²梁崇智，南投縣草屯地政事務所主任

Apply Mathematics binary quadric form analysis to solve the instrumental station coordinates using the resection mode

Abstract

mapping control point is the basis for handling digital number Land Resurveying business. However, several recent public constructions in this jurisdiction have caused the so-called permanent mapping control point to be no longer permanent. Therefore, the method of constructing permanent mapping control point has been changed from the source. The concept of graph root point is indeed an important issue that our institute should consider at present. Therefore, if the aforementioned on-site building characteristics can be constructed, relatively fixed buildings and facilities (not on the ground) are used as known targets. In the future, as long as any instrumental station is placed near the target, the instrumental station coordinates can be quickly obtained. This is also the basic concept of the traditional resection.

The above-mentioned related operation methods have been discussed for many years, and there are also some common practices in the industry, such as resection, method of free station, e-gnss and other methods. However, this test sample uses binary quadric form and uses Mathematics concepts to deduce vector structure relationships. It is expected that the corresponding coordinates can be quickly, simplified, and immediately available, and will not be affected by The impact of dense alleyways and housing shelters in the city is for experimental purposes.

The research results show that the results of the on-site binary quadric form solution and the total station own resection function analysis and comparison results are presented at different instrumental station and at different angles. The results vary slightly. According to the 4 test field modes this time, in the total station function operation resection mode, when the angle and geometry are sharp, the error amount will increase accordingly. In addition, when the Mathematics binary quadric form is less affected by included angles and geometric figures.

Keywords: Mathematics、binary quadric form、resection、method of free station、e-GNSS

壹、研究源起與目的

一、研究源起

土地複丈業務為地政事務所最繁複且涉及民眾權益之主要業務，依地籍圖成圖又可分為圖解區與數值區，以數值區而言，其相鄰界址位置如何測設至現地之最主要依據則為圖根點。但由於絕大部份人對圖根點重要性缺乏認知及法令保護，以本所轄區草屯鎮為例，近年因城市發展建設，電力、電信、瓦斯、自來水……等地下管線工程施作，以及道路翻修、人行道之鋪設與綠化。使得原埋設圖根點幾乎損毀殆盡。

現有實地存在之圖根點數量及分佈隨著時間每況愈下，因此往往要辦理土地複丈業務時面對此問題，都需耗費大量人力與時間。除此從僅有倖存之圖根點去進行圖根點補建作業，依據誤差傳播定律，導線精度將隨距離與測站數量增加而降低，且多餘觀測量不足，其精度更容易讓人質疑。

在地籍測量作業中，無論是地籍圖重測、土地複丈或其他不同形式的地籍整理，地籍圖與現況相符永遠是所追求的最高目標。而檢視圖地是否相符，是必須依據地籍測量實施規則相關規範，依基本控制點、加密控制點及圖根點施測之，綜上，如何能使上述問題獲得緩解並提高效益，則為本次研究重要課題。

二、研究目的

以尚存現場圖根點辦理土地複丈，即可透過已知圖根點放樣，立即可知界址點其坐標與位置，但現場圖根點遺失或兩點間無法通視，其測量成果因參考基準不同或圖根點轉點次數等影響，將導致同一個界址卻有不同結果，不只會讓民眾對於土地複丈公信力產生疑慮，更致使民眾權益遭受損害。故在現今寸土寸金的時代，圖根點補建及維護勢已刻不容緩，但在有限的人力、物力情況下，利用有效的測量技術依可靠幾何結構或參數，而有效率與快速補建圖根點進而達成圖根點或補點之永續性，為本次研究試驗的理想目標。

後方交會技術是一種應用於測量學中的技能，主要用來確定未知點的位置，尤其在無法直接觀測到圖根點的情況下，這種方法尤為實用。其基本原

理是從未知點觀測多個已知控制點，通常是三個或更多，來測量這些點的水平角度或距離，然後運用三角學或幾何計算來求出未知點的坐標位置。後方交會法簡要步驟為先選取已知的控制點，它們的坐標需事先確定，接著從未知點觀測這些已知點的角度或距離，最後透過數學計算，推算出未知點的位置。此技術在地形測量、工程測量、建築和導航中應用普遍。其優勢在於只需從該點觀測已知點即可進行該點定位。這方法除能節省時間和勞力，特別適合於一些難以通視的地形或狹窄的測量環境。

雖然已有相當多文獻對於以後方交會方式應用於地籍測量這方面的探討，但在實務上仍有一些作業模式未進行相關驗證，因為多數人員對於系統正確使用方式及理解概念的不同，也出現一些不同的作業方式。為此本研究希望能將圖根永續方式做一個延續性之推展，印證以不同數學模式所呈現之成果來做客觀分析，期望以科學的方式將此經驗及結果能提供參考價值。

貳、相關文獻及規定

一、相關文獻

有關測量相關領域探討中，對於偏向純數應用於幾何研究並不常見，故將本研究所參閱文獻分述如下：

(一)、XIA Jiahui 等人於 2022 年 Engineering Construction 中所發表，針對全球導航衛星系統(GNSS) 與常規測量後方交會模式有深入比較。該研究說明在本質上全球導航衛星系統(GNSS)偽距定位是屬於測邊後方交會原理，與常規測量後方交會所不同的是 GNSS 衛星是屬於動態的，而在常規測量中的後視點則是固定的。GNSS 接收器是透過觀測偽隨機碼進行時間比對來計算距離，常規測距儀是透過測定電磁波相位差來進行測距，儘管如此但二者在原理上是相通的。

從該研究中分析 GNSS 衛星幾何分佈強度與定位精度之間的關係了解，當 GNSS 衛星在接收器觀測視野內分佈得越廣，衛星的幾何強度就越強。位置精度因子 PDOP 值就越小，解算出來的接收器的平面位置精度就越高。但

如果 GNSS 衛星在接收器的上空區域聚集的範圍越小越狹長，則 PDOP 值就會越大，衛星的幾何強度就越弱，相應的接收器平面定位精度就會越低。故 GNSS 衛星在 (X-Y) 平面內的投影分佈越廣，水平定位精度就越高。

另外其針對 GNSS 定位的垂直位置精度之所以總是低於平面位置精度，該文點出最主要的原因是對點位垂直分量解算有貢獻的衛星都分佈在地平面以上，就是都位於接收儀的上空，而接收儀下方的衛星都被地球遮住了，無法在點位垂直分量解算中運作。同時該研究並假設地球是一個同質量且體積無限小的質點，GNSS 系統仍以同樣的方式正常運轉，那麼 GNSS 定位的垂直精度與平面精度將會趨於相同，且整體精度會大幅提高。

經由以上論述，個人認為前段說明間接印證有關外差的相似概念，只是立場點一個偏向三維一個則是偏向二維。

接下來該篇分別以：力學的觀點、結構強度的觀點來分析幾何結構。

1、力學的觀點

在理論上力學與測量學這兩個學科之間是具有共通性的，而聯繫二者之間的橋樑就是三角學。力的平衡與分解需應用三角學求得力的分量，測量學中點位的縱向與橫向精度的評定亦需要用到三角學，透過力的平衡與分解來分析後視點佈局與後方交會精度之間的關係是合理的。因此從力學的角度來看，若某點受到週邊幾個相等大小的外力作用，外力在方向上分佈得越均勻，則這幾個力的合力就越是趨於平衡，該點就越趨於穩定，若幾個外力都作用在點的同一側，則合力就會大於每一個分力，這時就會使得受力點產生加速運動。若偶數個外力對稱地分佈在受力點的兩側，每一側的力都聚集在一個小範圍內，即使合力為零，受力點達到平衡，在合力的垂直方向上，這種平衡狀態也就會容易被破壞。

2、結構強度的觀點

在測量中控制點與測量點透過觀測值的關聯而構成幾何圖形，稱為觀測網形。測量理論認為，觀測網形中任何一點的顯著移動，相應地都會造成至

少一個觀測值的顯著變化，則這個觀測網形強度就較強，由此建立的未知點位精度就越高。對後方交會而言，測站點與後視點透過邊長觀測值關聯，也構成了觀測網形，因此同理而論，後方交會觀測網形強度越強，測站定位定向的精確度就越高。

(二)、Dung Trung Pham 等人於 2022 年 Journal of Mining and Earth Sciences Vol. 62, Issue 3 (2022) 53 - 64 中所發表，該文敘明越來越多地方直接應用於地面雷射掃描器 (TLS) 來做地理位置的配準，這種方法的好處是節省時間，但精確度較低，使用上有很大困難，因此則提出了一種使用後方交會法進行高精度直接地理位置配準的可行方法。應用新系列 TLS 與稱為全站儀掃描器的全站儀相結合，可以應用後方交會法來克服原先的問題。但目前仍缺乏後方交會方法對點雲品質的評估，該文便分析了後方交會法中各誤差源分量對點雲總誤差的影響。實驗中使用 Topcon GTL-1000 全站儀掃描器，地面控製網路和方格目標由 Leica TS06 plus 全站儀來建立，實驗結果驗證了點雲總誤差與後方交會法地理位置配準的理論完全一致。此外掃描器到被測物體的距離和入射角是影響點雲精度的主要因素，這些因素與點雲精度之間的關係是透過決定係數 ($R^2 > 0.7$) 非線性來測量的。採用後方交會法可以得到毫米級精度的掃描站坐標，因此後方交會方法是最適合應用於 TLS 地理配準的方法之一，同時在辦公室進行 TLS 資料後處理的高精度和節省時間是該方法的巨大優勢。

另外其研究最後說明使用後方交會法的地理位置配準足以滿足高精度，與 GNSS-RTK 的厘米級精度相比，透過後方交會法獲得的掃描站坐標精度為毫米級，在直接地理配準中具有顯著優勢，因為不會有多路徑效應。此外使用後方交會的掃描站是免費的，這是與 GNSS 方法相比的另一個好處。

(三)、D. Dekov 於 2012 年 Journal of Geodetic Science 中所發表，對於三點後方交會問題，即可從相對角度測量中取得未知點位置，其中關係到三個已知站點，這些都是測量工程中的基本操作。在過去的幾個世紀裡，解決這個問題的方法有很多種已被開發出來。在該文中更提出了一種解決該問題

新的數值方法，透過此方法僅使用基本公式對應坐標幾何，他們還提供了數值模擬來顯示這種方法的良好性能和準確性。

文中提出了一個新的三點重建數值解化的問題，他們的做法是撰寫一個檢核程式，從不同角度推算彼此互相的對應值，藉以判斷最佳解的方式。該方法代表了一個問題的現有解決方案的替代方案，這方法僅適用於坐標幾何的基本公式。經過使用簡單的計算機程式進行數值模擬的方法，已證明該方法具有良好的性能，電腦程式運行快速且正確。

(四)、Anas S M Osman 等人於 2021 年 Journal of Marine-Earth Science Technology, Volume 2 Issue 2 中所發表，文中說明應用三點後方交會法來確定後方交會點（未知位置點）的位置提供了準確且高效的解決方案。該文提出了一種簡單而創新的方法來確定測量中三點後方交會問題的精確度，此方法涉及將控制點（已知位置的點）分佈在四個象限上，並多次計算後方交會點（P）的坐標，以便查看哪個象限提供更好的精度，該研究調查了控制點的位置（無論是在一個象限或象限組合中）對後方交會點精度的影響。

另外該文的主要目的是探討控制點在不同象限的分佈對後方交會點精確度的影響。此外，研究的目的是確定這三個點在一個象限中的位置或在象限組合中的位置的最佳位置。也詳細檢查了後方交會點與其他控制點的相對位置之間的關係以及後方交會點的精確度。該研究結果表明，控制點與後方交會點的相對位置顯著影響後方交會點的精確度。文中最後透過定義分佈在象限上的控制點的位置來得出後方交會點的最佳精度。

最後在文中提出了一種新的三點交會法精度調查策略。所提出的策略包括將控制點分佈在四個象限上，並多次計算後方交會點（P）的坐標，以評估哪個象限提供更好的精確度。該研究透過分析控制點位置（無論是在一個象限中還是在象限組合中）對後方交會點精度的影響，為此問題提供了新的見解。

從該研究使用多個控制點進行三點交會，分析不同象限的後方交會點的

實際坐標與其計算坐標之間的差異。根據其結果所得出結論為控制點的位置與後方交會點（P）的精確度之間存在相關性。上述結果表明，當控制點位於象限組合中而不是僅位於一個象限中時，後方交會點的精度更高，這項觀察結果強調了仔細選擇控制點位置以在三點後方交會解決方案中達到所需精度水平的重要性。

二、相關法令及規範

依據地籍測量實施規則第 73 條規定：「戶地測量採數值法測繪者，其圖根點至界址點之位置誤差不得超過下列限制：(一)、市地：標準誤差二公分，最大誤差六公分。(二)、農地：標準誤差七公分，最大誤差二十公分。(三)、山地：標準誤差十五公分，最大誤差四十五公分。」；第 74 條規定：「戶地測量採數值法測繪者，其界址點間坐標計算邊長與實測邊長之差不得超過下列限制：(一)、市地： $2\text{ 公分} + 0.3\sqrt{S}$ (S 係邊長，以公尺為單位)。(二)、農地： $4\text{ 公分} + 1\sqrt{S}$ 。(三)、山地： $8\text{ 公分} + 2\sqrt{S}$ 。」；第 247 條規定：「複丈應以圖根點或界址點作為依據，並應先檢測圖根點及界址點，所測得點位間之距離與由坐標反算之距離，其差不得超過下列限制：(一)、市地： $0.005\sqrt{S} + 0.04\text{ 公尺}$ (S 係邊長，以公尺為單位)。(二)、農地： $0.01\sqrt{S} + 0.08\text{ 公尺}$ 。(三)、山地： $0.02\sqrt{S} + 0.08\text{ 公尺}$ 。前項之檢測應由縱橫二方向實施之。」

參、研究方法與理論分析

一、研究方法

(一)、研究範圍選定

本研究區範圍之選定，主要是考量該地區已辦理過數值地籍測量，該區為地籍調查有指實界地區，該區尚有原圖根點可供檢核驗證，除以上條件外就是其所在區域為市區巷道內 e-gnss 容易被遮蔽地形，因此選擇草屯鎮炎峰段為本研究之實驗區域。

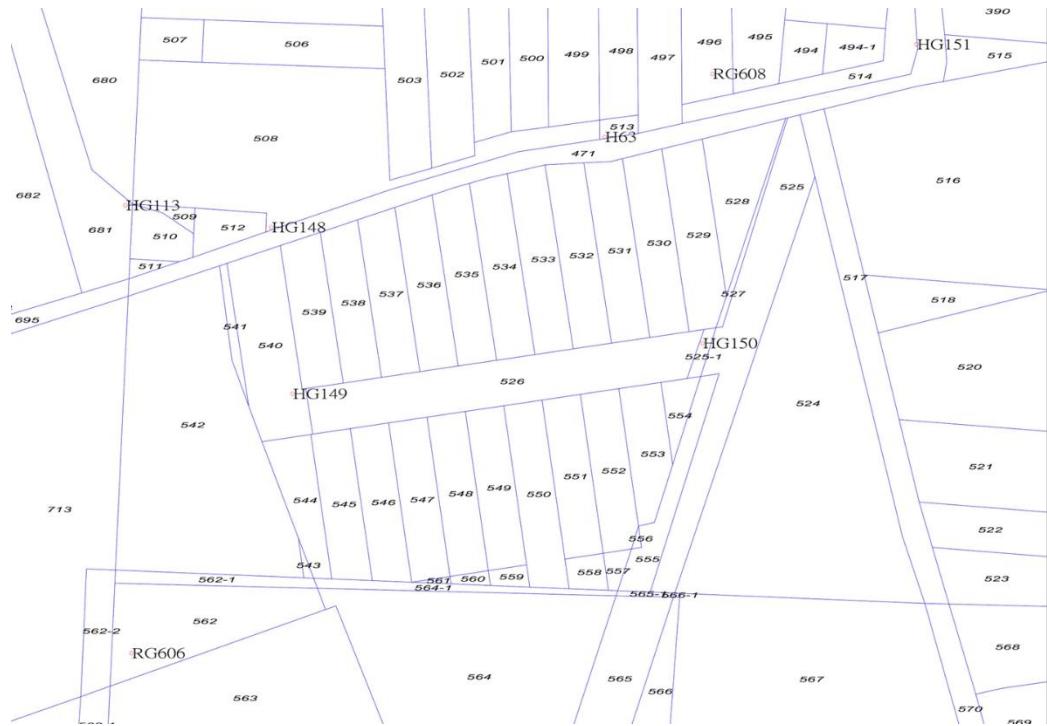


圖 1 本研究試驗範圍圖

(二)、研究過程

1、研究模式選定

本試驗模式是採用二元二次聯立方程式，以純數概念去推導出向量幾何結構關係，期待能以更快速、簡化、減少誤差傳播方式得到可用之相對應坐標，而且不受都市內密集巷道及房屋遮蔽所影響。

2、靜態模型測試

選定以二元二次聯立方程式來解析，首先將資料庫現有重測區檔案內已知點幾何關係先萃取出來，這些萃取出彼此間的幾何關係資料就視為標準件。而這些標準件除了要與靜態模式所推導出資料匹配比較，也要作為與現場實測解算資料做類似後驗檢核，待本研究方法所解算資料能符合實驗室內靜態解算，方能至實地現場應用，否則本方程式若連與已知資料都無法模擬匹配，就更無實際付諸的可能。

3、現場動態測試

經前揭程序確立本數學模式符合靜態基本精度後，至現場實際測量及驗

證解算坐標與標準件差異，本次驗證兼採以經緯儀本身內建後方交會模式求坐標方式，另一方式則以本研究二元二次聯立方程式方式求取坐標，最後再以這兩種方式分別與標準件做比較，借以分析出此數學模式下可靠度。

4、建立各個觀測資料分析樣本

5、資料庫資料互相檢驗。

6、幾何結構較差實證分析。

7、提出結論及建議。

二、理論分析

本研究分別以傳統後方交會、二元二次聯立方程式方式分述其基本原理架構，期待能從中取得對複雜幾何結構有新的想法及認知。

(一)、後方交會

後方交會法是一種用於測量學中的技術，主要用來確定未知點的位置，尤其在無法直接到達該點的情況下，這種方法尤為實用。其基本原理是從未知點觀測多個已知控制點，通常是三個或更多，來測量這些點的水平角度或距離，然後運用三角學或幾何計算來求出未知點的坐標位置。後方交會法步驟包括：首先選取已知的控制點，它們的坐標需事先確定。接著從未知點觀察並測量這些已知點的角度或距離，最後透過數學計算，推算出未知點的位置。

此技術在地形測量、工程測量、建築和導航中經常使用。其優勢在於不需要測量者親自到達未知點，只需從該點觀測已知點即可進行定位。這方法能節省時間和勞力，特別適合於一些難以接近的地形或狹窄的測量環境。

1、後方交會優點

(1)、適用於無法對視的地點：測量者無需親自到達未知點即可完成定位，這對於危險地形或難以接近的區域尤為有用。

(2)、節省時間與人力：由於測量主要集中在一個觀測點上，不需要在多個地點移動，這提高了效率。

(3)、機動性佳：可根據可用的已知點選擇不同的測量策略，具有較高的操作靈活性。

2、後方交會缺點

(1)、必須依附已知控制點：測量的準確性與已知點的位置準確度息息相關，如果已知點有誤差，結果將不可靠。

(2)、計算較複雜：需使用三角學或幾何學進行計算，涉及較為複雜的數學步驟，以上是指數學推算而論。但目前幾乎經緯儀皆有此功能，只是在操作上需要學習及熟悉。

(3)、誤差傳播：任何測角或測距誤差都可能傳遞到最終結果，影響定位準確性，這縱使在其他應用上也是會時常面對的問題。

(一)、二元二次聯立方程式

解二元二次聯立方程式的過程需要精確的步驟來將兩個變量的系統簡化為單一變量的方程，這通常涉及運用消元法或代入法的策略來逐步解出變量，並最終求得完整的解集，以下是這一過程的詳細論述。

解二元二次聯立方程式的關鍵在於如何消去一個變量，使系統簡化為單變量的過程。這一步驟通常需要觀察兩個方程式，判斷如何進行代數操作來達到這個目的。假如若兩個方程式有相似的項式，可以將它們相加或相減以消除某些項式來達到目的。若代入法更為適合，則需要將一個方程式中的變量用另一個變量的表示式來替代。

經由以上在獲得單變量方程式後，問題可轉化為如何去求解這個方程式，若方程是二次方程，則可以使用二次方程公式來求解。如果是更高次方程，可能需要使用其他數學方法或代數運算，這一過程需要謹慎處理，特別是當多項式較複雜時，需要將所有項式整理並化簡，避免遺漏掉或誤解。

在求得一個變量的解之後，將迴代來代入原方程式之一來求解另一個變

量，待完成整個系統的求解過程。在迴代過程應考慮不同解是否合理，並需驗證每個解是否同時滿足兩個原方程式，另二元二次聯立方程式的優缺點可從數學性質及其應用角度來分析。

1、二元二次聯立方程式優點

(1)、多元系統的表達能力：二元二次聯立方程式可以用來描述許多較複雜的現象，例如：圓、雙曲線、橢圓等二次曲線的交點等問題，這使得它在幾何及工程中具有廣泛的應用。

(2)、數學思維的提升：解這類方程有助於加深對代數技巧的理解，如多項式運算、方程化簡、代入法及消元法等，同時它也能幫助培養邏輯推理和問題解決能力。

(3)、實際的應用：在工程學、經濟學、機械設計等領域，二元二次聯立方程式可用來建模並解決實際問題，如軌跡運動和最佳化問題。

2、二元二次聯立方程式缺點

(1)、解法較為複雜困難：二元二次聯立方程式的求解過程比一元一次或一元二次方程式更為繁複，可能需要更高階的代數技巧或數學方法，這對於非數學專業人士而言，可能造成理解和計算的困難。

(2)、可能造成多解或無解情況：由於二次方程式的特性，解這類聯立方程式時可能出現多組解或無解的情況。因此這在解題過程中必須分析合理性，並驗證是否滿足所有原方程式。

(3)、潛在的誤差：在使用近似數值方法時，結果可能存在有誤差藏於其中，尤其是在處理具有多個變量和非線性關係的聯立方程時，這時就需要特別注意計算精度和結果的驗證。

綜上，二元二次聯立方程式在數學和應用領域提供了強大的表達能力和解決複雜問題的途徑，但其解法相對複雜，可能需要較高的數學知識或計算工具來輔助，這使得它在數學應用上既是挑戰，也是機遇。

肆、實證分析

本研究試驗分別以兩階段實施，第一階段為實驗室內靜態模式分析，第二階段為現場實地界址驗證分析。

一、 實驗室內靜態模式分析

推導撰寫二元二次程式：

$$\begin{cases} (Ax - Px)^2 + (Ay - Py)^2 = D1^2 \\ (Bx - Px)^2 + (By - Py)^2 = D2^2 \\ (Cx - Px)^2 + (Cy - Py)^2 = D3^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} Ax^2 - 2A_x P_x + Px^2 + Ay^2 - 2A_y P_y + Py^2 = D1^2 \\ BX^2 - 2B_x P_x + Px^2 + By^2 - 2B_y P_y + Py^2 = D2^2 \\ CX^2 - 2C_x P_x + Px^2 + Cy^2 - 2C_y P_y + Py^2 = D3^2 \end{cases}$$

由兩個坐標點之間的距離公式求得上述方程式，若今天有兩座標

A(x₁,y₁)和 B(x₂,y₂)則此兩點之間的距離為

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

下方開始解上述二元二次聯立方程式：

$$\text{設} \Rightarrow -2Ax = C_1, -2Bx = C_3, -2Cx = C_5$$

$$-2Ay = C_2, -2By = C_4, -2Cy = C_6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Px^2 + Py^2 = D1^2 - Ax^2 - Ay^2 - C_1 P_x - C_2 P_y \\ Px^2 + Py^2 = D2^2 - Bx^2 - By^2 - C_3 P_x - C_4 P_y \\ Px^2 + Py^2 = D3^2 - Cx^2 - Cy^2 - C_5 P_x - C_6 P_y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ① - \left\{ (-C1 + C3)P_x + (-C2 + C4)P_y = D1^2 - Ax^2 - Ay^2 - D2 + Bx^2 + By^2 \right. \\ ② - \left. \left\{ (-C3 + C5)P_x + (-C4 + C6)P_y = D2^2 - Bx^2 - By^2 - D3^2 + Cx^2 + Cy^2 \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{1} \times (-C3 + C5) - \textcircled{2} \times (-C1 + C3) \\
\Rightarrow & (-C2 + C4)(-C3 + C5)P_y - (-C4 + C6)(-C1 + C3)P_y \\
= & (-C3 + C5)Q - (-C1 + C3)P \\
(Q = & D1^2 - Ax^2 - Ay^2 - D2 + Bx^2 + By^2, \\
P = & D2^2 - Bx^2 - By^2 - D3^2 + Cx^2 + Cy^2) \\
\Rightarrow & [(-C2 + C4)(-C3 + C5) - (-C4 + C6)(-C1 + C3)]P_y \\
= & (-C3 + C5)Q - (-C1 + C3)P \\
\Rightarrow P_y = & \frac{H}{I} \quad (\text{H} = (-C3 + C5)Q - (-C1 + C3)P) \\
(I = & [(-C2 + C4)(-C3 + C5) - (-C4 + C6)(-C1 + C3)])
\end{aligned}$$

Py 帶入①即可求出 Px

二、現場實地界址驗證分析

經由以上推導過程驗證並與標準件試算比對無誤後，即著手撰寫電腦程式，以方便從事外業工作時可隨時解算坐標。本次研究標準件是以原圖根點為P點(待求點)，依其與周圍確定點彼此幾何關係建立架構，同時現場實測也是以圖根點為標準(測站)，將先前所佈設於建物(固定物)上確定點量測並解算，最後將解算後坐標與前述標準件已知坐標驗證，即可得到較差值。

草屯地政事務所應用空間已知點(3點)求測站坐標計算							
用已知的ABC三點 座標以及 AP,BP,CP解二元 二次聯立方程式 求出P點座標	已知點	X	Y	S. AB	9. 010	S. BC	10. 761
	a	218306. 820	2652655. 360	S. a→P	5. 846	S. d→P	6. 673
	c	218313. 311	2652649. 111	S. c→P	5. 062		
	d	218316. 697	2652659. 325	正確坐標(P)	正確坐標(P)	(X)較差	(Y)較差
	P	218312. 531	2652654. 112	218312. 531	2652654. 112	0. 000	0. 000
★只需輸入藍色空格部份							
	C1	-436613.64					
	C2	-5305310.72					
	C3	-436626.622					
	C4	-5305298.222					
	C5	-436633.394					
	C6	-5305318.65					
	C3-C1	-12.982					
	C4-C2	12.498					
	C5-C3	-6.772					
	C6-C4	-20.428					
	D2^2-Bx^2-By^2-2*D1^2+Ax^2+Ay^2	30318737.8154207					
	D3^2+Cx^2-Cy^2-2*D2^2-Bx^2+2*By^2	-55666830.66653					
	(C1-C2)(C5-C3)+(C6-C4)(C3-C1)	-340.823752					
	(C5-C3)(C4-C1)*P	-97.383432					
帶入二元二次聯立	Py	2652654.112	最後解				
方程式求解	Px	218312.5312					

圖 2 撰寫外業解算系統



圖 3 現場原圖根點



圖 4 現場實測已知點

依規劃本研究至實地現場有圖根控制點可供檢核區域，將儀器架設圖根點為測站，依輻射方式將周圍各個已知點逐一量測，再將所量測已知點與測站間彼此幾何關係依二元二次聯立方程式解算坐標。



圖 5 現場儀器後方交會模式實測解算較差分

以二元二次聯立方程式計算																																							
HG149測站 觀測點A、B、C																																							
草屯地政事務所應用空間已知點(3點)求測站坐標計算 <table border="1"> <thead> <tr> <th>已知點</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>S.AB</th> <th>S.BC</th> <th>S.AC</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>218261.507</td> <td>2652652.272</td> <td>S.a→P</td> <td>7.524</td> <td>4.976</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>218265.172</td> <td>2652646.368</td> <td>S.b→P</td> <td>3.674</td> <td></td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>218270.080</td> <td>2652644.055</td> <td>S.c→P</td> <td>4.976</td> <td></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>218268.082</td> <td>2652648.613</td> <td>正確坐標(X)</td> <td>正確坐標(Y)</td> <td>(X)較差 (Y)較差 位置較差</td> </tr> </tbody> </table> 用已知的ABC三點 座標以及 AP,BP,CP解二元 二次聯立方程式 求出P點座標 										已知點	X	Y	S.AB	S.BC	S.AC	A	218261.507	2652652.272	S.a→P	7.524	4.976	B	218265.172	2652646.368	S.b→P	3.674		C	218270.080	2652644.055	S.c→P	4.976		P	218268.082	2652648.613	正確坐標(X)	正確坐標(Y)	(X)較差 (Y)較差 位置較差
已知點	X	Y	S.AB	S.BC	S.AC																																		
A	218261.507	2652652.272	S.a→P	7.524	4.976																																		
B	218265.172	2652646.368	S.b→P	3.674																																			
C	218270.080	2652644.055	S.c→P	4.976																																			
P	218268.082	2652648.613	正確坐標(X)	正確坐標(Y)	(X)較差 (Y)較差 位置較差																																		
HG149測站 觀測點A、C、D																																							
草屯地政事務所應用空間已知點(3點)求測站坐標計算 <table border="1"> <thead> <tr> <th>已知點</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>S.AB</th> <th>S.BC</th> <th>S.AC</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>218261.507</td> <td>2652652.272</td> <td>S.a→P</td> <td>7.524</td> <td>5.466</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>218270.080</td> <td>2652644.055</td> <td>S.c→P</td> <td>4.976</td> <td></td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>218273.251</td> <td>2652656.386</td> <td>S.d→P</td> <td>10.395</td> <td></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>218268.081</td> <td>2652648.612</td> <td>正確坐標(X)</td> <td>正確坐標(Y)</td> <td>(X)較差 (Y)較差 位置較差</td> </tr> </tbody> </table> 用已知的ABC三點 座標以及 AP,BP,CP解二元 二次聯立方程式 求出P點座標 										已知點	X	Y	S.AB	S.BC	S.AC	A	218261.507	2652652.272	S.a→P	7.524	5.466	C	218270.080	2652644.055	S.c→P	4.976		D	218273.251	2652656.386	S.d→P	10.395		P	218268.081	2652648.612	正確坐標(X)	正確坐標(Y)	(X)較差 (Y)較差 位置較差
已知點	X	Y	S.AB	S.BC	S.AC																																		
A	218261.507	2652652.272	S.a→P	7.524	5.466																																		
C	218270.080	2652644.055	S.c→P	4.976																																			
D	218273.251	2652656.386	S.d→P	10.395																																			
P	218268.081	2652648.612	正確坐標(X)	正確坐標(Y)	(X)較差 (Y)較差 位置較差																																		
HG150測站 觀測點A、B、C																																							
草屯地政事務所應用空間已知點(3點)求測站坐標計算 <table border="1"> <thead> <tr> <th>已知點</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>S.AB</th> <th>S.BC</th> <th>S.AC</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>218306.829</td> <td>2652655.360</td> <td>S.a→P</td> <td>5.846</td> <td>5.062</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>218303.557</td> <td>2652649.044</td> <td>S.b→P</td> <td>10.395</td> <td></td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>218313.311</td> <td>2652649.111</td> <td>S.c→P</td> <td>5.062</td> <td></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>218312.531</td> <td>2652654.112</td> <td>正確坐標(X)</td> <td>正確坐標(Y)</td> <td>(X)較差 (Y)較差 位置較差</td> </tr> </tbody> </table> 用已知的ABC三點 座標以及 AP,BP,CP解二元 二次聯立方程式 求出P點座標 										已知點	X	Y	S.AB	S.BC	S.AC	a	218306.829	2652655.360	S.a→P	5.846	5.062	b	218303.557	2652649.044	S.b→P	10.395		c	218313.311	2652649.111	S.c→P	5.062		P	218312.531	2652654.112	正確坐標(X)	正確坐標(Y)	(X)較差 (Y)較差 位置較差
已知點	X	Y	S.AB	S.BC	S.AC																																		
a	218306.829	2652655.360	S.a→P	5.846	5.062																																		
b	218303.557	2652649.044	S.b→P	10.395																																			
c	218313.311	2652649.111	S.c→P	5.062																																			
P	218312.531	2652654.112	正確坐標(X)	正確坐標(Y)	(X)較差 (Y)較差 位置較差																																		
HG150測站 觀測點A、C、D																																							
草屯地政事務所應用空間已知點(3點)求測站坐標計算 <table border="1"> <thead> <tr> <th>已知點</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>S.AB</th> <th>S.BC</th> <th>S.AC</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>218306.829</td> <td>2652655.360</td> <td>S.a→P</td> <td>5.846</td> <td>6.673</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>218313.311</td> <td>2652649.111</td> <td>S.c→P</td> <td>5.062</td> <td></td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>218316.697</td> <td>2652659.325</td> <td>S.d→P</td> <td>10.395</td> <td></td> </tr> <tr> <td>P</td> <td>218312.531</td> <td>2652654.112</td> <td>正確坐標(X)</td> <td>正確坐標(Y)</td> <td>(X)較差 (Y)較差 位置較差</td> </tr> </tbody> </table> 用已知的ABC三點 座標以及 AP,BP,CP解二元 二次聯立方程式 求出P點座標 										已知點	X	Y	S.AB	S.BC	S.AC	a	218306.829	2652655.360	S.a→P	5.846	6.673	c	218313.311	2652649.111	S.c→P	5.062		d	218316.697	2652659.325	S.d→P	10.395		P	218312.531	2652654.112	正確坐標(X)	正確坐標(Y)	(X)較差 (Y)較差 位置較差
已知點	X	Y	S.AB	S.BC	S.AC																																		
a	218306.829	2652655.360	S.a→P	5.846	6.673																																		
c	218313.311	2652649.111	S.c→P	5.062																																			
d	218316.697	2652659.325	S.d→P	10.395																																			
P	218312.531	2652654.112	正確坐標(X)	正確坐標(Y)	(X)較差 (Y)較差 位置較差																																		

圖 6 以二元二次聯立方程式解算成

經現場以二元二次聯立方程式解算與經緯儀後方交會功能分析比較結果，在不同測站及各個不同角度下所呈現結果差異性略有不同。依本次 4 個測試模式下，經緯儀在後方交會模式下當角度及幾何較尖銳時，其誤差量將隨之增大(詳如圖 5)，另以純數二元二次聯立方程式解算則受夾角及幾何圖形影響較小(詳如圖 6)。

伍、結論及建議

一、結論

經由以上實測分析中發現一項值得參考的訊息，就是若以彼此間距離所產生之結構，依二元二次聯立方程式所解算出坐標值與標準件較差，比經緯儀以傳統後方交會模式所解算坐標差異較小，這種現象的發生將隨著角度變化而跟著改變。如圖 5 分析中可看出，以經緯儀傳統後方交會模式所解算坐標，當夾角位於 $66^\circ \sim 132^\circ$ 間，其坐標與標準件之間差異尚小，但當落於 $41^\circ \sim 69^\circ$ 間時，與標準件之間較差則達 6.6 公分，有隨著角度越尖銳較差也隨之增大趨勢。另以圖 6 分析中可看出，以彼此間距離結構，以二元二次聯立方程式解算坐標值與標準件較差則相對較小，且所受角度影響變化量也較小。以上問題倒是蠻讓人意外的發現，這涉及到幾何結構及其他可變因素，值得後續深入探討。

審視前揭不同角度變化所產生變量差異，要將背後因素收斂成唯一答案有其困難性，因為有可能為儀器造成，也有可能是有多餘的誤差傳播滲入，亦有可能為該實驗區幾何結構所致……。若要將以上問題一一解釋，就會與本研究初衷有所偏離。故本篇延續第肆章結果，以二元二次聯立方程式所解算坐標經實證分析，此模式對測量或是其他工程應用上，有其實用及參考性。尤其依靠彼此間距離來快速解算坐標，除了能將事情簡單化，重點是能將應用及效能提升至最大化。試想若在其他非土地複丈環境下，不需要專業特殊儀器及操作人員，或有些夾角無法通視或觀測，單以現場已知點相對距離即可快速取得坐標，此應用可提供多元目標及方向之參考。

二、建議

透過以上分析，本研究有幾項建議提供參考：

1. 依本次研究區域，二元二次聯立方程式所解算出的坐標成果尚佳，距離測量若以正倒鏡施測來提升精度，應更能符合地籍測量所使用。
2. 應用此方法由於依據彼此距離所形成之結構為解算基礎，建議現場宜採取 4 段以上的距離基準，並適時以不同觀測值交互計算檢查成果是否有差異。
3. 本試驗區交會之已知點為原先所佈設完成，因此各點位皆有已知坐標，建請作業單位可以有計畫性針對適合且需要地區預先規劃。

4. 經由此次研究分析，爾後或可嘗試以現場存在之原地籍調查表確定界址為應用。
5. 本次研究同時兼以傳統後方交會模式計算，經由分析比較，該模式下角度過於尖銳或偏向同一象限時，所解算之坐標差異隨之變大，供使用此模式者參考。

陸、參考文獻

- 一、Cook, A. J., & Gibbings, P. (2019). Can a Series of Resections Replace Conventional Traversing?
- 二、Dekov, D. (2012). A numerical method for solving the horizontal resection problem in surveying. *Journal of Geodetic Science*, 2(1), 65-67.
- 三、Font-Llagunes, J. M., & Batlle, J. A. (2009). New method that solves the three-point resection problem using straight lines intersection. *Journal of Surveying Engineering*, 135(2), 39-45.
- 四、Haralick, R. M., Lee, C. N., Ottenburg, K., & Nölle, M. (1991, June). Analysis and solutions of the three point perspective pose estimation problem. In CVPR (Vol. 91, pp. 592-598).
- 五、Ke, T., & Roumeliotis, S. I. (2017). An efficient algebraic solution to the perspective-three-point problem. In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (pp. 7225-7233).
- 六、Osman, A. S. M., Mabrouk, A. M., Mahjoub, A. M., Elkhalfia, E. A., & Elhag, A. A. (2021). Accuracy Investigation of the Three-point Resection Method Through the Distribution of Control Points Across Four Quadrants. *Journal of Marine-Earth Science and Technology*, 2(2), 39-50.
- 七、Pham, D. T., Nguyen, A. T. N., Cao, C. X., Le, T. D., Le, C. V., & Ngo, C. S. (2022). Resection method for direct georeferencing in Terrestrial Laser Scanner. *J. Min. Earth Sci*, 63, 53-64.
- 八、Song, Z., Zhao, C., Pu, H., & Li, X. (2016). Configuration analysis of two-dimensional resection networks. *Journal of Surveying Engineering*, 142(4), 04016018.
- 九、Wang, P., Xu, G., Wang, Z., & Cheng, Y. (2018). An efficient solution to the perspective-three-point pose problem. *Computer Vision and Image Understanding*, 166, 81-87.

研究發現與建議	<p>研究發現：經由以上實測分析中發現一項值得參考的訊息，就是若以彼此間距離所產生之結構，依二元二次聯立方程式所解算出坐標值與標準件較差，比經緯儀以傳統後方交會模式所解算坐標差異較小，這種現象的發生將隨著角度變化而跟著改變。</p> <p>研究建議：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 依本次研究區域，二元二次聯立方程式所解算出的坐標成果尚佳，距離測量若以正倒鏡施測來提升精度，應更能符合地籍測量所使用。 2. 應用此方法由於依據彼此距離所形成之結構為解算基礎，建議現場宜採取 4 段以上的距離基準，並適時以不同觀測值交互計算檢查成果是否有差異。 3. 本試驗區交會之已知點為原先所佈設完成，因此各點位皆有已知坐標，建請作業單位可以有計畫性針對適合且需要地區預先規劃。 4. 經由此次研究分析，爾後或可嘗試以現場存在之原地籍調查表確定界址為應用。 5. 本次研究同時兼以傳統後方交會模式計算，經由分析比較，該模式下角度過於尖銳或偏向同一象限時，所解算之坐標差異隨之變大，供使用此模式者參考。
選擇獎勵	<input checked="" type="checkbox"/> 行政獎勵 <input type="checkbox"/> 奬勵金